moagem controlada até ao calibre desejado constituirá um incremento divisível sem perda de representatividade que, com relativa facilidade, permitirá satisfazer aquelas condições.

— Mas, se os incrementos houverem que ser colhidos em galerias, etc., terão de ter peso mínimo para representarem a granulometria que exibirão e podem, por isso, ser relativamente volumosos. Mas, mesmo assim, se o processo de tratamento a ensaiar exigir, *a priori*, moagem abaixo de certo calibre fino, poderão ser controladamente moídos e divididos de forma a constituirem convenientemente os pequenos incrementos desejados.

(ii) Todavia, poderá dar-se o caso, aliás frequente, do próprio processo de tratamento em investigação desejar esclarecer o comportamento do minério em calibres relativamente graúdos. Nesse caso, há que abandonar, quase sempre, o recurso aos testemunhos das sondagens e utilizar como locais de amostragem as galerias, etc., *e não será possível constituir incrementos de pequeno porte que sejam representativos dos intervalos* $\triangle Z_1$ *arbitrariamente escolhidos.*

Os incrementos terão de ter peso que se não poderá fixar *a priori*, sem se considerar as exigências da teoria de Gy.

2.º — A acessibilidade à jazida é reduzida. Por exemplo, os testemunhos das sondagens não existem, ou não são de confiança, ou já se alteraram; não existe ossatura de preparação suficientemente extensa ou, a que existe é tal, que só em certos locais se podem colher amostras; ou, ainda, há que abrir galerias, travessas ou chaminés, que terão de ser de reduzida extensão, porque o tempo é escasso ou, também, não é possível, por razões económicas ou de temporização, realizar conveniente campanha de sondagens adicional.

Nesse caso, a escolha dos locais de amostragem estará confinada apenas a algumas possibilidades.

Suponhamos então que se dispõe de um ponto acessível que se localiza num bloco ou painel V. Se aí colhermos um incremento, a variância de extensão, isto é, o estimador da variância do erro de atribuir à amostra o teor krigado do bloco ou painel V é, como se sabe,

$$\left[\sigma^2_{0/v}\right]^* = \sigma^2_{KV} + \frac{1}{V^2}\int_V dx \int_V \gamma\,(x-y)\,dy = \sigma^2_{KV} + \overline{\gamma\,(V,V)}$$

Poderá, por exemplo, dizer-se que haverá aproximadamente a probabilidade de 95% para que o teor da amostra se afaste do teor *estimado* do painel mais de $2\sqrt{\sigma^2_{0/v}}$.

Se a situação for um pouco mais favorável, isto é, se, em dado painel ou bloco, se puderem colher vários incrementos (sejam N), o estimador da variância de extensão ao teor médio desses incrementos do teor estimado para o painel, é, obviamente,

$$\left[\sigma^2_N\right]^* = \sigma^2_{KV} + \frac{2}{VN}\sum_i^N \int_V \gamma\,(x_i - x)\,dx - \overline{\gamma\,(V,V)} - \frac{1}{N^2}\sum_{i,j}^N \gamma\,(x_i - x_j)$$

Poderá, portanto, procurar-se, dentre os locais acessíveis, aqueles que revelem maior probabilidade de fornecer incrementos com certos teores médios, previamente escolhidos para preencher o histograma a reproduzir.

Mas, seja como for, colhidos os incrementos, eles exibirão individualmente certos teores médios que, por sua vez, representarão nova população de amostras que há que comparar com a de referência, atrás mencionada.

Quer dizer, nestes casos de reduzida acessibilidade da jazida, não há, em geral, forma de reproduzir o histograma de referência — obtem-se uma população de incrementos que, eles próprios, exibem certo histograma, em geral, distinto do de referência.

O primeiro passo a dar é o da comparação dos dois histogramas (o dos incrementos e o de referência) para verificar se dizem respeito à mesma população. São estes clássicos. Com muita frequência, estes testes são negativos, mesmo tomando o cuidado de relacionar o histograma de referência a suporte da ordem de grandeza do dos incrementos ou vice-versa.

Assim sendo, *um dos caminhos possíveis*, num caso destes, é construir amostra compósita, com os incrementos Z_i, que satisfaça às condições:

$$\mathrm{I}\begin{cases} b^i\left(Z_i - m\right) \longrightarrow 0 \\ \left(D(Z_i) - D(Z_v^*)\right)^2 \longrightarrow 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \sum_i b^i = 1 \\ b^i \geqq 0 \\ i \in \{1, \ldots, N\} \end{array}$$

Se for possível satisfazer I com os pesos dos incrementos e os respectivos teores disponíveis, ter-se-á amostra única compósita representativa, quanto ao atributo em questão, no que diz respeito à média e com dispersão de teores que se afasta o menos possível da da distribuição de referência.

Quando houver interesse simultâneo em vários atributos X, Y, Z, etc., poder-se-á compor, com os incrementos, amostra que satisfaça a condição muito mais forte:

$$\mathrm{I'}\begin{cases} b^i\left[X_i - E\left(X_v^*\right)\right] \longrightarrow 0 \\ b^i\left[Y_i - E\left(Y_v^*\right)\right] \longrightarrow 0 \\ b^i\left[Z_i - E\left(Z_v^*\right)\right] \longrightarrow 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left\{r\left[D(X_i) - D(X_v^*)\right]^2 + s\left[D(Y_i) - D(Y_v^*)\right]^2 + \ldots \longrightarrow 0 \right. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \sum_i b^i = 1 \\ b_i \geqq 0 \\ i \in \{I, \ldots, N\} \\ r + s + \ldots = 1 \,;\, r, s, \ldots \geqslant o \end{array}$$

Condição que só com muitos locais acessíveis será possível satisfazer, como é óbvio.

É claro que, nestes casos, haverá *uma amostra única*, cujo peso, muitas vezes, não será diminuto, se se atender à granulometria com que os incrementos são obtidos. Dependerá do tipo de teste de tratamento a realizar.

Todavia, nem sempre sistemas como I e I' serão trabalháveis. Poderá então comparar-se a população de incrementos com a de referência em termos de média e de variância.

Esta via pode ter mais interesse quando há, simultaneamente, vários atributos a estudar.

Exemplo (Figs. 1, 2 e 3)

O exemplo diz respeito a amostragem realizada em extensa bacia carbonífera Brasileira relativamente regular, onde se havia definido, por numerosas sondagens, duas camadas sobrepostas de carvão e onde a acessibilidade era muito reduzida.

A bacia havia sido, arbitrariamente, dividida em quatro áreas denominadas I, II, III e IV. E as camadas classificadas de «superior(s)» e «inferior(i)».

Foi possível colher incrementos nessas duas camadas apenas na área II, que constituiram duas populações denominadas por A(II,s) e A(II,i).

A comparação entre os histogramas de A(II,s) e A(II,i) com os histogramas de referência de qualquer das áreas (histogramas deduzidos dos testemunhos das sondagens) mostrava que os teores de cinzas, matérias voláteis e enxofre não pretenciam às mesmas distribuições embora os suportes fossem aproximadamente os mesmos.

Optou-se então em estudar as equivalências em média e em variância das populações para, de certo modo, classificar a representatividade das duas amostras colhidas. As figuras referidas mostram os resultados obtidos, os quais permitem, sem dúvida, algumas conclusões pertinentes quanto a representatividade.

3.2. Segundo objectivo: Afinação (optimização) do processo de tratamento Construção de curvas de lavabilidade semi-industriais

Na realidade, para cumprir este objectivo, o suporte «bloco tecnológico» e respectivo histograma pode ter reduzido interesse. Uma vez que o processo de tratamento a adoptar tenha sido escolhido, o objectivo da amostragem é então o seguinte: «Pretende-se regular (e optimizar) o processo para uma alimentação que deve simular a futura alimentação do concentrador. Com frequência, a construção da curva de lavabilidade semi-industrial poderá estar incluída nos objectivos desta investigação final.»

Assim sendo, as populações dos incrementos devem ser representativas, cada uma, de cada tipo de minério que haja sido definido na jazida, o que não traz novidade relativamente ao que se referiu. mais

como a maioria dos processos se realiza efectivamente sobre produtos de calibre relativamente fino, o que interessa é considerar os histogramas «pontuais».

Há, portanto, que tentar realizar krigagem para suportes «mínimos» e construir os respectivos histogramas que serão mais *dispersos* do que os das carotes.

Interessa então simular amostragens referidas a estes histogramas, usando, por exemplo a metodologia atrás mencionada.

Há aqui, todavia, outra vantagem adicional, é que se lida normalmente com grandes amostras, pois se realizam testes piloto ou semi-industriais, o que implica maior acessibilidade à jazida.

MATRIZ DE EQUIVALÊNCIAS

	S(II,s)	S(II,i)	S(III,s)	S(III,i)	S(IV,s)	A(II,s)	A(II,i)
S(II,s)	1	—	1	—	0	1	—
S(II,i)	—	1	—	1	0	0	1
S(III,s)	1	—	1	0	0	1	—
S(III,i)	—	1	0	1	—	—	1
S(IV,s)	0	—	0	—	1	0	—
A(II,s)	1	—	1	—	0	1	1
A(II,i)	—	1	—	1	—	1	1

N. B. 1 — equivalente; 0 — não equivalente.

GRAFO DE EQUIVALÊNCIAS

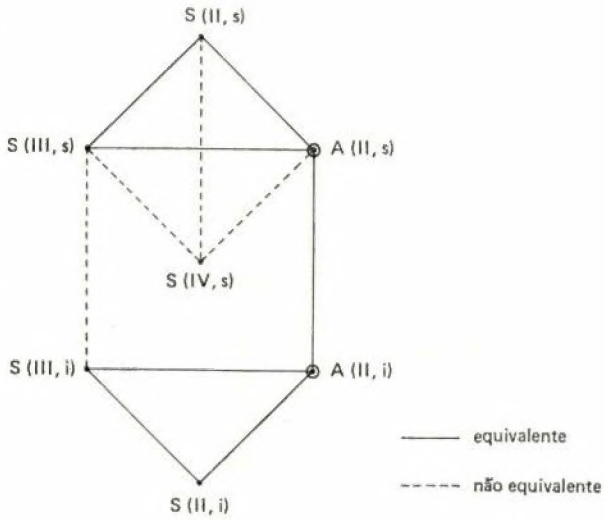


Fig. 1

Equivalência em média quanto a cinzas

MATRIZ DE EQUIVALÊNCIAS

	S(II,s)	S(II,i)	S(III,s)	S(III,i)	S(IV,s)	A(II,s)	A(II,i)
S(II,s)	1	—	1	—	0	1	—
S(II,i)	—	1	—	1	0	0	1
S(III,s)	1	—	1	0	0	1	—
S(III,i)	—	1	0	1	—	—	1
S(IV,s)	0	—	0	—	1	0	—
A(II,s)	1	—	1	—	0	1	1
A(II,i)	—	1	—	1	—	1	1

N. B. 1 — equivalente; 0 — não equivalente.

GRAFO DE EQUIVALÊNCIAS

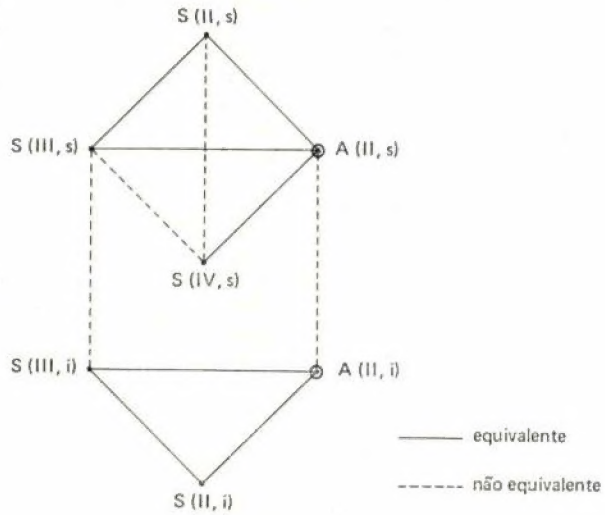


Fig. 2

Equivalência em variância quanto a cinzas

GRAFO DE EQUIVALÊNCIAS

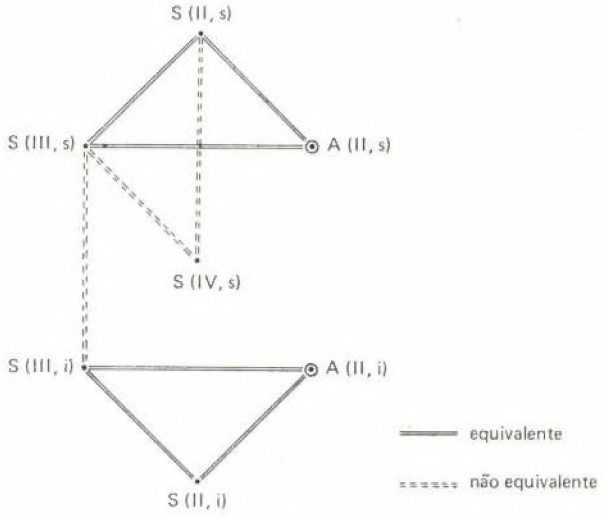


Fig. 3

Equivalência em média e variância quanto a cinzas

4. LISTA DE SÍMBOLOS NÃO DEFINIDOS NO TEXTO

Z	atributo, característica, variável regionalizada
Z_V	valor médio do atributo no volume V (bloco, painel, bloco tecnológico)
Z_V^*	estimador de krigagem de Z_V
$E(\,.\,)$	esperança
$D(\,.\,)$	variância de dispersão
$\triangle Z$	intervalo de atributo
$\overline{\triangle Z}$	valor médio arbitrado para o intervalo $\triangle Z$
σ^2_{KV}	variância de krigagem de Z_V
$\gamma(\,.\,)$	variograma
$\overline{\gamma(.,.)}$	variograma médio
m	valor médio $\simeq E(\,.\,)$

(Continuação da pág.ª 202)

A British Steel Corporation que, consoante a política vigente, sofreu os efeitos de uma nacionalização (1949), desnacionalização (1953) e nova nacionalização (1967), procedeu a uma redução suplementar de efectivos (38 mil). Por seu turno, a ARBED, importante empresa do Sarre, que, com a tomada de controlo da Neunkirchen na RFA e da Rodange-Athus no Luxemburgo, pôs ponto final na reestruturação da siderurgia regional, deverá despedir 8200 efectivos, até 1982, para poder atingir o ritmo de rendibilidade dos japoneses.

No caso de pretender adaptar o seu aparelho de produção aos novos dados do mercado do aço, ou seja, ao abrandamento, que tudo leva a crer seja duradouro, do ritmo de crescimento do consumo (consequência retardada dos efeitos da crise sobre os clientes das siderurgias), e à entrada de novos países produtores no mercado (a produção de aço brasileira registou um aumento de 229 % entre 1960 e 1974), a siderurgia europeia terá ainda de solucionar sérios problemas.

Quatro anos de «crescimento negativo»

Evolução de 1974 a 1977 em %

Países	Taxas de utilização da capacidade	Produção	Produtividade
Grã-Bretanha	−12	−10	− 1
Itália	−15	− 0,2	− 8
França	−22	−22	−17
Rep. Fed. da Alemanha	−30	−36	−26
Bélgica	−33	−44	−21
CEE	−24	−23	−16
USA	+ 3 [1]	−17	− 1
Japão	−15 [2]	−14	−10

1 1975-1977.
2 1975-1976

[Extraído do «Boletim Mensal BFN», (12) Dezembro 1978].

(Continua na pág.ª 260)

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.28:622.1/2/7:550.4/7:553

Introdução à Simulação

HENRIQUE GARCIA PEREIRA
Instituto Superior Técnico
Universidade Técnica de Lisboa

RESUMO

Os princípios da simulação estocástica são discutidos na sua generalidade e o Método de Monte Carlo é descrito brevemente.

Aplicações da Simulação Estocástica nos diferentes domínios das Ciências da Terra são referidas no texto e bibliografia existente no CVRMUL é indicada para cada caso específico.

Os domínios considerados são a Geologia e Prospecção, Exploração e Tratamento de Minérios e finaliza-se com a Análise económica global de um projecto mineiro.

ABSTRACT

The principles of stochastic simulation are briefly discussed and Monte Carlo method is described.

Applications of stochastic simulation in some fields of the Earth Sciences are referred and references are given for each specific case.

The main fields treated are geology and exploration, mine planning and ore dressing. The global economic study of a mining venture is also introduced in a case story.

ÍNDICE

1. GENERALIDADES

2. SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA

2.1 — Princípio do método

2.2 — Números aleatórios

2.3 — Simulação segundo uma lei de distribuição qualquer

2.4 — Intervalos de confiança

3. SÚMULA DE APLICAÇÕES

3.1 — Geologia

3.2 — Prospecção

3.3 — Exploração

3.3.1 — Generalidades

3.3.2 — Transporte

3.3.3 — Planeamento global da exploração

3.4 — Tratamento de Minérios

3.5 — Análise económica de um projecto mineiro

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. GENERALIDADES

A simulação é uma técnica cujo objectivo é reproduzir o comportamento de um sistema complexo através de um modelo.

Esta técnica é em geral aplicável quando a experimentação exaustiva sobre o sistema é difícil ou proibitiva do ponto de vista económico.

Utiliza-se ainda a simulação em sistemas em que a base teórica que descreve o seu comportamento no tempo (por exemplo, sistema de equações diferenciais) é completamente desconhecida ou em que certas operações unitárias são conhecidas, mas as interdependências entre estas são complexas ou não formuláveis de um modo coerente.

Neste tipo de problemas, é usual recorrer à simulação do sistema através da construção de um *modelo* que descreva na sua *complexidade* e *detalhe* a realidade que se pretende reproduzir (e não necessariamente na sua «essência», como se pretende no «método científico»).

Na base de toda a simulação está pois a formulação de um *modelo*, e esta vale na medida da validade do modelo. Sem nos determos agora sobre a construção dos modelos (admitimos que estes reproduzem o sistema numa determinada gama de condições), vamos apenas classificá-los em FÍSICOS (mecânicos e analógicos [1]) e MATEMÁTICOS.

Trataremos apenas da simulação executada sobre modelos matemáticos. Estes são, em geral, um conjunto de regras lógicas que governam a interacção entre os componentes do sistema. Em certos casos, o modelo pode ser explicitado numa relação da forma

$$Y = X(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$$

onde Y é a variável de saída ou função objectivo e $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ são as variáveis de entrada ou de controle.

A simulação consiste em introduzir um conjunto de combinatórias das variáveis de entrada e procurar várias soluções para a função objectivo de acordo com as regras lógicas que constituem o modelo. Utilizando computadores, pode tratar-se um grande número de dados rapidamente e comparar uma série de soluções possíveis com a realidade (o que pode levar a um «feed back» sobre o modelo) e introduzir modificações para resolver determinados problemas.

Segundo o tipo de variáveis de que o sistema depende (ou do grau de conhecimento sobre elas), a simulação pode ser *determinista* ou *estocástica*.

A simulação *estocástica*, em que as variáveis de que o sistema depende são *aleatórias*, tem-se revelado um método útil para resolver uma gama de problemas que vão da física nuclear (difusão de partículas) até à previsão económica.

Repetindo um certo número de vezes as operações lógico-matemáticas do modelo sobre as variáveis de entrada (que obedecem a determinadas leis de distribuição de probabilidade), é possível obter uma *distribuição* das resultantes possíveis do sistema e sobre esta retirar conclusões que podem ir desde uma simples *descrição* do sistema até à *previsão* do seu comportamento em determinadas condições, *optimizações* empíricas, etc.

Este último caso, em que *decisões* são tomadas a partir da simulação estocástica, é o mais interessante e situa-se num campo de inter-fase entre a geomatemática e a investigação operacional. A maioria dos exemplos descritos neste trabalho situam-se nesse campo.

Num sistema complexo como é uma unidade mineira, as primeiras «variáveis de entrada» que temos de considerar são *VARIÁVEIS REGIONALIZADAS* (dados sobre teores, possanças, etc., em amostras) que obedecem a uma lei de distribuição de probabilidade e a uma função de autocorrelação (covariância).

É a partir deste *input* básico que um conjunto de decisões técnico-económicas do planeamento mineiro têm de ser tomadas.

Se pensarmos em todo o conjunto de operações que vai desde a geologia, reconhecimento do jazigo, exploração, beneficiação e metalurgia verificamos que, ao carácter estocástico particular (*) das Variáveis Regionalizadas, se vai sobrepor todo um conjunto de interacções com variáveis técnicas e económicas, algumas das quais são tratáveis por métodos determinísticos, outras por métodos probabilísticos.

A simulação permite descrever essas interacções através de modelos, prever variações no sistema por modificações de condições operacionais, comparar alternativas de funcionamento e optimizar certos parâmetros.

É aparente que se trata de uma técnica particularmente útil na indústria mineira já que, os constrangimentos e dificuldades a que esta se tem de sujeitar (ao contrário das indústrias transformadoras «normais», implantadas num local criteriosamente escolhido e tratando, sempre nas mesmas condições, matéria-prima de qualidade rigorosamente controlada) tornam difícil o planeamento por métodos em que o carácter estocástico não intervenha.

De facto, a «matéria-prima» da indústria mineira encontra-se «in situ», está sujeita a uma variabilidade importante e nunca é «totalmente» conhecida no momento do planeamento.

Neste trabalho, daremos alguns exemplos do tratamento deste tipo de problemas através da técnica da simulação.

2. SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA

2.1. Princípio de Método

Seja então $Y = X(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ o modelo que estabelece a relação entre a variável de saída Y (também chamada *função objectivo* em certas aplicações da investigação operacional) e as variáveis $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$. Algumas dessas podem ser Variáveis Aleatórias(**), que, em princípio, vamos admitir que obedecem a determinadas leis de distribuição de probabilidade $f_1(x_1), f_2(x_2) \ldots\ldots f_n(x_n)$.

O primeiro passo para realizar a simulação estocástica é fazer uma «amostragem» fictícia das variáveis $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, isto é, obter 1 realização dessas variáveis.

Se as leis de distribuição de probabilidade dessas variáveis fossem uniformes entre 0 e 1 e visto que, nesse caso, a lei de repartição da variável F(x) era F(x) = x (ver Fig. 1), números aleatórios uniformemente gerados entre 0 e 1 seriam os valores da realização da variável pretendida.

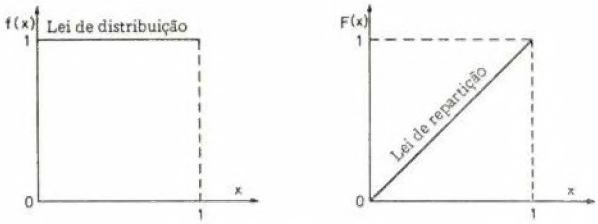


Fig. 1

Distribuição uniforme

(*) Tratado em especial na Simulação Condicional.

(**) Neste tratamento, vamos admitir que estas variáveis são independentes e obedecem apenas ao constrangimento da lei de distribuição de probabilidade. Na simulação condicional tratar-se-á a amostragem de Variáveis Regionalizadas.

Verificamos portanto que na base de qualquer simulação estocástica está a geração de números aleatórios (ver TABELA I) e 2.2.

Mas, a partir de um conjunto de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1 é possível obter uma «amostragem» fictícia das variáveis $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ obedecendo a leis de distribuição quaisquer $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots\ldots f_{n-1}(x_{n-1}), f_n(x_n)$ através do processo seguinte que se descreve na Fig. 2:

1) Gerar um númro aleatório uniformemente entre 0 e 1 $\rightarrow R_u$

2) Fazer $R_u = F(x)$

3) Obter $x = F^{-1}(R_u)$

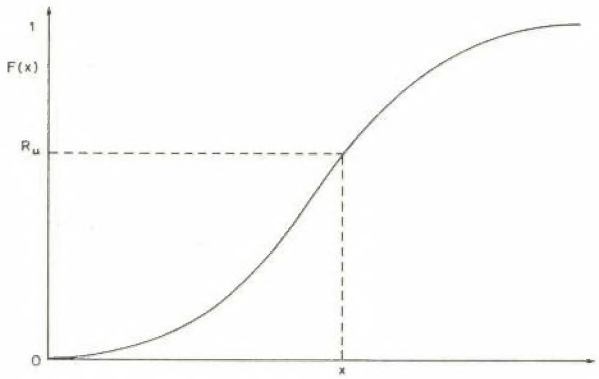


Fig. 2

Ficamos assim com n realizações de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ obedecendo às respectivas leis de distribuição de probabilidade. Introduzindo agora essas realizações no modelo, obtém-se uma realização de Y.

Repetindo esta operação k vezes (ver 2.4 para estimar o número de iterações necessárias para certos intervalos de confiança) obtém-se uma distribuição de Y concretizada num *histograma* «experimental».

A partir desta distribuição, retiram-se as conclusões possíveis sobre o comportamento do sistema. Estas podem assentar simplemente na Esperança e Variância de Y ou noutro estatístico de interesse para certos problemas específicos (pode determinar-se a probabilidade de Y ser superior a certo limite, por exemplo).

Para esclarecimento mais completo do princípio aqui esquematizado, ver [2], [3], [4].

2.2. Números aleatórios

Para obter números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo [0,1], podem utilizar-se métodos mecânicos baseados em qualquer sistema de tiragem à sorte, métodos eléctrico-analógicos em que um ruído electrónico é convertido num sinal digital ou métodos digitais em computador.

Neste último caso (que é o único prático), os números gerados não são verdadeiramente aleatórios (designam-se por pseudo-aleatórios) visto que têm de ser gerados a partir de um algoritmo qualquer (Tabela I). O algoritmo mais utilizado é o das congruências, em que

$$x_i = a\, x_{i-1} + c \text{ (módulo m)} \qquad (1)$$

isto é, cada número aleatório x_i obtém-se do anterior x_{i-1} como o resto da divisão de $(a\, x_{i-1} + c)$ por m, sendo a, c e m constantes escolhidas convenientemente para que o período a partir do qual a sequência se repete seja suficientemente elevado.

Por exemplo, tomando 2 como ponto de partida, $a = 3$, $m = 16$ e $c = 1$, a sequência que se obtém tem período 8, o que é manifestamente insuficiente:

$$\text{período } 8 \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_1 = 7 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 10 \\ x_5 = 15 \\ x_6 = 14 \\ x_7 = 11 \\ x_8 = 2 \end{array}\right.$$

Em alguns computadores, $m = 2^{31}$, $a = 2^{16} + 3$. Como os valores obtidos são sempre inferiores a m, os números aleatórios pretendidos entre [0,1] obtêm-se simplesmente dividindo por m o output de (1).

Existem subrotinas para gerar estes números e portanto não nos vamos deter neste assunto. Para informação competa e para os testes estatísticos que garantem a aleatoriedade e independência das sequências geradas, ver [2], [3], [4], [5], [6].

2.3. Simulação segundo uma lei de distribuição qualquer

Uma vez obtidos os números pseudo-aleatórios, é necessário convertê-los de modo a respeitarem a lei de distribuição da variável em causa (*).

Se o histograma experimental da variável não obedecer a nenhuma lei de expressão analítica simples, é necessário introduzir, na memória do computador, a tabela da distribuição empírica comulativa e proceder de acordo com a metodologia descrita em 2.1.

Sempre que possível, esta solução é de evitar por razões práticas e económicas e deve interpolar-se o histograma experimental através de uma lei de distribuição conhecida.

(*) Este método de «amostragem empírica» é designado por método de MONTE CARLO.

Alguns algoritmos para gerar números aleatórios R obedecendo a algumas distribuições mais comuns a partir de R_{u_i} (aleatórios uniformemente distribuídos em [0,1]) estão listados seguidamente:

1) *Distribuição uniforme* no intervalo [a, b]

$$R = R_u(b-a) + a$$

2) *Distribuição exponencial* $f(R) = \lambda e^{-\lambda R}$ ou

$$F(R) = 1 - e^{-\lambda R}$$

$$R = -\frac{1}{\lambda} \ln (1-R_u)$$

3) *Distribuição normal reduzida*

Uma aproximação obtida a partir do teorema do limite central(*) dá um algoritmo simples para obter R

$$\frac{\sum_{i=1}^{K} Ru_i - K/_2}{\sqrt{K/2}}$$

K é o número de iterações necessárias.

Para K = 12, obtém-se $R = \sum_{i=1}^{12} R_{u_i} - 6$ o que dá aproximação satisfatória em muitos casos (lei normal reduzida truncada entre −6 e +6).

A tabela II é uma listagem de números aleatórios segundo a lei normal reduzida.

4) *Lei Normal de média* μ *e desvio padrão* σ

$$R = \sigma \left(\sum_{i=1}^{12} R_{u_i} - 6 \right) + \mu$$

5) *Lei de Poisson* $f(R) = \frac{e^{-\lambda}}{R!} \lambda^R \quad R = 0, 1, 2, \ldots$

R = K, onde K é o menor inteiro tal que

$$\sum_{i=1}^{K} -\frac{1}{\lambda} \ln (1-R_{u_i}) > 1$$

6) *Lei binomial* $f(R) = \binom{n}{R} p^R (1-p)^{n-R}$

$$R = 0, 1, 2, \ldots$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} K_i \qquad \text{onde } K_i = \begin{cases} 0 \text{ se } R_{u_i} < p \\ 1 \text{ se } R_{u_i} \geqslant p \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

7) *Lei de Weibull*

Uma distribuição que se adapta particularmente ao tipo de problemas em que se pretende interpolar um histograma experimental com uma forma qualquer é a chamada distribuição de Weibull, cuja lei de densidade de probalidade é:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t-\gamma}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad t > \gamma$$

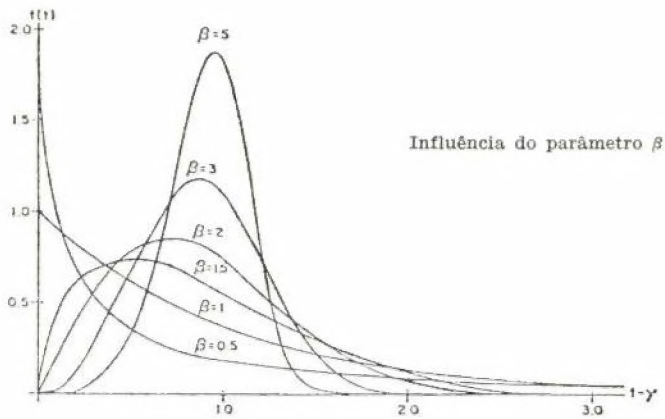
e depende dos parâmetros α, β, γ, o que permite conferir-lhe uma grande variedade de configurações.

O parâmetro β (de forma) permite jogar com o tipo de distribuição ajustável ao histograma experimental:

Para $\beta = 1$, a distribuição é exponencial, para $\beta = 3.6$ é aproximadamente normal, para $\beta = 1.5$ é aproximadamente lognormal.

Por escolha conveniente de β, podem obter-se distribuições «intermédias» em relação às clássicas (Fig. 3).

O parâmetro α (de escala) permite comprimir ou distender a distribuição com uma certa forma ao longo do eixo dos t (a variância aumenta com α). longo do eixo dos t (a variância aumenta com α), como se vê na Fig. 4.



Influência do parâmetro β

Fig. 3

O parâmetro γ controla a «posição» da distribuição ao longo da obcissa.

Um método simples e facilmente programável de estimar α, β e γ descreve-se seguidamente:

A função de repartição escreve-se

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad t > \gamma$$

tomando o duplo logaritmo, fica

$$\ln \ln \left[\frac{1}{1-F(t)} \right] = \beta \ln (t-\gamma) - \beta \ln \alpha$$

(*) Existem outros métodos mais «exactos» de gerar a lei normal, por exemplo, em [3] p. 33 deduz-se um algoritmo usando funções trignométricas.

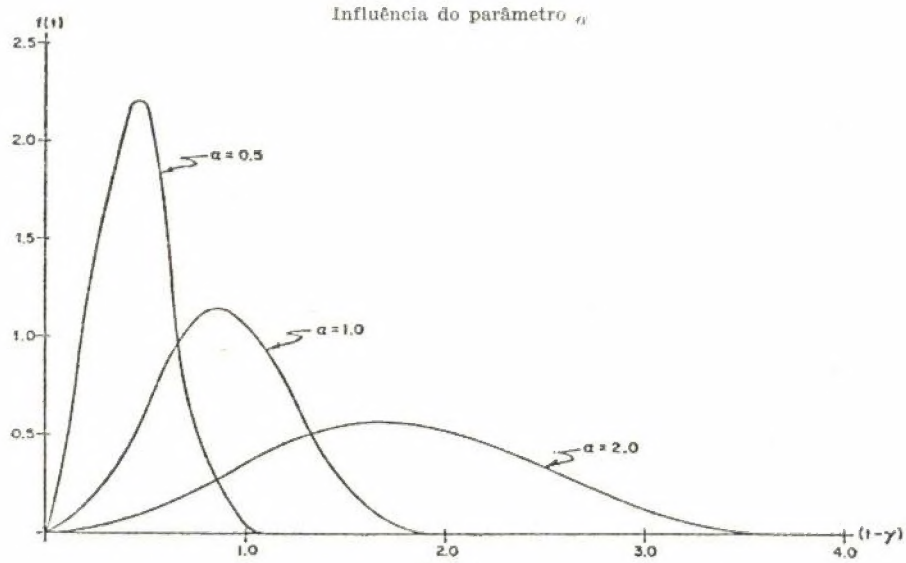


Fig. 3

fazendo

$$Y = \ln \ln \left[\frac{1}{1-F(t)} \right]$$

$$X = \ln (t-\gamma)$$

$$A = -\beta \ln \alpha$$

vem

$$Y = \beta X + A$$

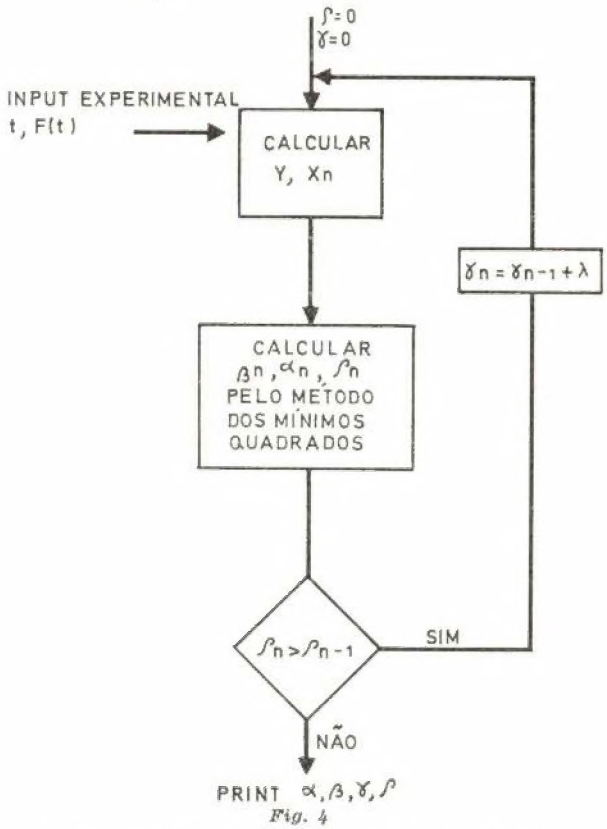


Fig. 4

Diagrama de blocos para ajustar a lei de Weibull

Um algoritmo simples de cálculo dos parâmetros baseado no método dos mínimos quadrados esquematiza-se na Fig. 4.

λ é um pequeno incremento a dar a γ que depende da escala dos t e que é ajustável a cada caso concreto. Obtido o γ que conduz a um ρ máximo, pode-se rodar o programa ainda para obter mais alguns valores de γ na parte descendente da curva $\rho = f(\gamma)$ e obter assim o máximo por interpolação.

2.4. Intervalos de confiança

Introduzidos os valores $X_1, X_2, \ldots X_n$ simulados segundo $f_1(x_1)$, $f_2(x_2) \ldots$, $f_n(x_n)$ no modelo $Y = X(x_1, x_2 \ldots x_n)$ e fazendo K iterações, obtém-se K realizações de Y e o seu histograma experimental.

É sobre este histograma experimental que as decisões vão ser tomadas.

De uma maneira geral, e na maioria dos casos práticos, a distribuição dos Y é normal (de acordo com o teorema do limite central).

Então, os intervalos de confiança a estabelecer em Y podem ser construídos a partir das regras da estimação dos parâmetros da lei normal a partir de uma amostra de dimensão K.

Por exemplo, suponhamos que as decisões a tomar se referem à esperança da variável de saída Y:

$$E\{Y\} = \overline{Y} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{k} Y_i$$

$$S^2\{Y\} = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^{k} (Y_i - \overline{Y})^2$$

(*) Para mais informação sobre o modo de gerar números aleatórios segundo determinadas leis de distribuição, ver [7], [8].

Admitindo um número elevado de iterações ($K > 100$), os intervalos de confiança para Y calculam-se por

$$\overline{Y} \pm \sqrt{\frac{S^2}{K} t_\beta}$$

onde t_β se tira das tabelas da lei normal reduzida para determinados níveis de probabilidade β (para $\beta = 68\ \% \rightarrow t_\beta = 1$, para $\beta = 95\ \%$, $t_\beta = 1.96$, para $\beta = 99\ \% \rightarrow t_\beta = 2.576$).

Para termos em $\overline{Y}$ um intervalo de confiança fixado, por exemplo $\varepsilon_\beta = 0.05\ Y$, calcula-se o número de iterações necessárias por

$$K = \frac{S^2\ t^2_\beta}{\varepsilon^2_\beta}$$

Mas este valor não pode ser imposto à priori porque depende de S^2. O processo de cálculo em computador é, depois de cada iteração, calcular S^2 e ε_β e dar uma instrução de paragem quando ε_β é menor do que um limite pré-fixado que depende do grau de confiança necessário para cada problema. É evidente que se pode estabelecer um balanço entre o custo de computação (mais iterações) e o rigor do resultado (ε_β menor).

3. SÚMULA DE APLICAÇÕES

3.1. Geologia

Muitos processos geológicos podem ser encarados do ponto de vista probabilístico, visto que a complexidade e interdependência entre variáveis dificultam a representação funcional.

Por exemplo, as sequências sedimentares podem ser modeladas por processos estocásticos, desde que se conheçam as probabilidades de transição de uma unidade litógica para a seguinte e as leis de distribuição de probabilidade das espessuras das diferentes unidades presentes.

Se a probabilidade de deposição de uma dada unidade S_1 depende do facto de ter sido precedida pela unidade S_2, o processo que descreve tal sistema é dito de Markov(*). Vamos apenas considerar neste exemplo um processo de Markov de 1.ª ordem, em que o estado do sistema num determinado ponto só depende do estado anterior (**).

Carr et al (1966) [2] estimaram as probabilidades de transição das camadas das Mississipian Chesteran Series por contagem de um grande número de casos de litologias que se seguem umas às outras numa sequência vertical e construiram a seguinte matriz de transição:

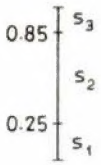
$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{ll} \text{arenito} & S_1 \\ \text{xisto} & S_2 \\ \text{calcário} & S_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta matriz é usada do seguinte modo: se o sistema está no estado S_1 (arenito), a probabilidade de surgir de novo outra unidade de arenito é 10 %, de xisto é 80 % e de calcário 10 %.

A simulação com base neste modelo de relações entre unidades geológicas e leis de distribuição de probabilidade pode agora executar-se para prever sequências em locais não amostrados, estender as observações feitas, desde que haja a garantia de que certas propriedades MARKOVIANAS(*) sejam respeitadas.

O processo de simulação é sintetizado seguidamente:

1. Escolhe-se um estado inicial para o sistema, de acordo com as proporções relativas totais das 3 unidades litológicas, segundo o esquema seguinte:



Se o número aleatório extraído for < 0.25 selecciona-se o arenito com o estado inicial do sistema.

2. De acordo com a lei de distribuição de probabilidade das espessuras das camadas de arenito, escolhe-se uma espessura para essa camada.

3. Na 1.ª linha da matriz de transição, selecciona-se a litologia seguinte:

Se o número aleatório estiver compreendido entre 0.1 e 0.9, será um xisto. Da lei de distribuição de probabilidade das espessuras das camadas de xistos, selecciona-se uma espessura para a camada.

4. Passa-se à 2.ª linha da matriz e repete-se o processo.

Na fig. 5 está representado uma sequência possível para a distribuição das camadas. Novas iterações poderão ser ensaiadas e obtém-se uma «distribuição» de sequências da qual certas decisões poderão ser retiradas conforme o tipo de problema a resolver.

3.2. Prospecção

Na prospecção geoquímica, procura-se em geral interpretar a distribuição da concentração dos elementos pesquisados em águas ou sedimentos e relacionar as «anormalias» verificadas com mineralizações.

(*) Sobre processos de Markov e sua aplicação na Geologia, ver [17], [18], [19], [20], [21].
(**) Stratigraphic Sections, bedding sequences and randon processes — Science, vol. 154 n.º 3753, p. 1162, citado em [21].

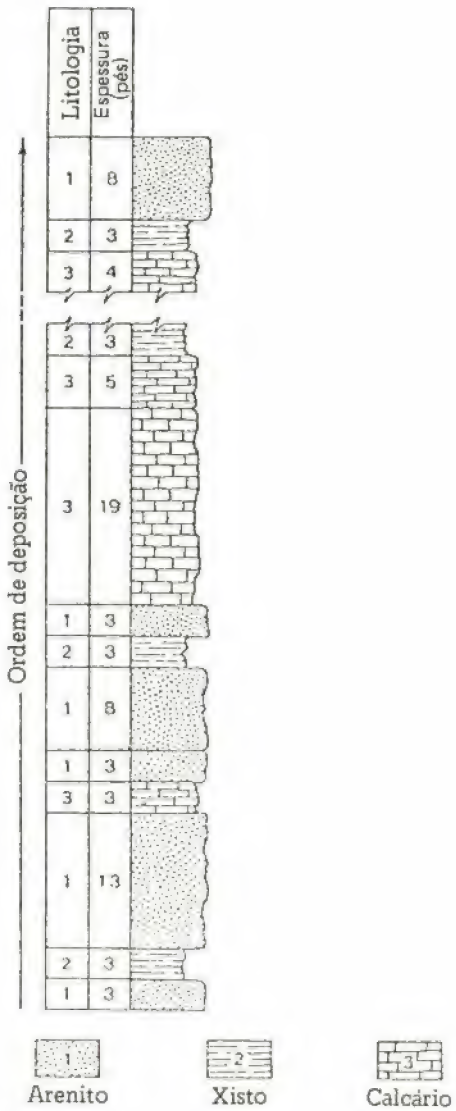


Fig. 5

Simulação de uma sequência sedimentar (segundo 21)

Na maioria dos casos, considera-se «anomalia» um «valor elevado» do elemento que se pretende prospectar.

Sem discutir por agora esta noção(*), é no entanto evidente que há um conjunto de factores que provocam «falsas» anomalias, cuja investigação no campo pode ser evitado se se fizer um tratamento preliminar dos dados.

Tais factores podem ser de vária ordem e são em geral considerados subjectivamente pelo geólogo.

Se for possível quantificá-los e interpretar a concentração dum dado elemento através de um modelo do tipo:

$$T = f(L, H, G, C, V, M, e)$$

onde T é a concentração do elemento

L é a influência de factores litológicos

H é a influência de factores hidrológicos

G é a influência de factores geológicos

C mede a interferência humana

V mede a interferência da cobertura vegetal

M representa os efeitos de corpos mineralizados

e é um termo de erro (ou de factores não considerados)

Uma técnica de regressão múltipla permite explicitar a forma da relação entre T e os diferentes factores (que podem não ser estes aqui citados, mas dependem do problema concreto).

O modo de quantificar os factores pode ser o seguinte:

Divide-se a região em estudo num certo número de células, como se exemplifica na Fig. 6 (segundo [22].

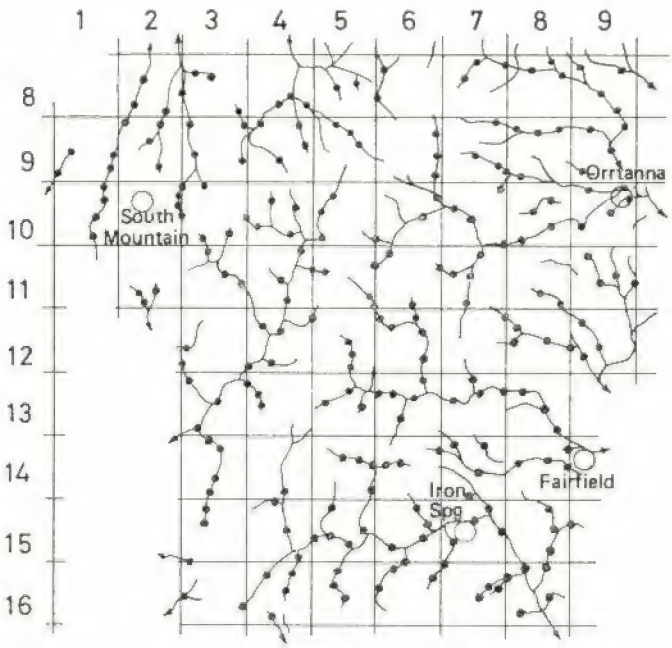


Fig. 6

Em cada célula, para quantificar o efeito litológico, por exemplo, mede-se a % da célula coberta por determinada formação litológica, que passa a constituir uma variável do modelo.

O efeito hidrológico corresponde ao comprimento total das linhas de água por célula e o seu número, por exemplo.

O efeito geológico pode medir-se pelo comprimento total de falhas, contactos ou outros acidentes estruturais por célula, etc...

O modelo é então estabelecido pela técnica de análise multivariante e um termo de erro aleatório

(*) Só um conjunto de valores dotados de uma certa «estrutura anómala» deve ser tomado em consideração segundo a teoria das V. R.

(calculado através da variância não explicável pelos factores controlados e por repetição de amostras) é adicionado.

Simulando, de acordo com o modelo e com a lei de distribuição de probabilidade do termo *e* de erro, os valores da concentração nos pontos amostrados, ficar-se-á com uma imagem da distribuição que seria de esperar obter nesses pontos se apenas os factores considerados tivessem tido influência.

A diferença entre os valores reais e os valores simulados constitui uma medida da qual os factores perturbantes conhecidos foram retirados e cuja distribuição pode fazer ressaltar a existência de possíveis «anomalias» relacionadas com mineralizações.

Aplicando o mesmo método(*) numa zona de controle para o número ou «valor» de ocorrências economicamente interessantes conhecidas, pode simular-se uma variável numa zona de estudo (mal conhecida) e inferir do seu interesse como objecto de prospecção. É este o princípio do «economical appraisal» de grandes regiões.

Pretendeu-se apenas levantar os problemas que podem ser resolvidos por utilização da simulação na prospecção. Para informação suplementar, ver [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28].

3.3. Exploração

3.3.1. Generalidades

Qualquer método de exploração pode ser dividido em operações elementares (subsistemas) com determinada sequência lógica e interacções previsíveis.

Assim é possível criar um modelo do sistema em que são tomadas em conta as interacções dinâmicas entre a geometria, geologia e reservas do jazigo e a alocação do equipamento, métodos e sequências de desmonte.

A técnica de simulação aplicada sobre esse modelo permite introduzir um método de planeamento, estratégias de exploração, e prever modificações no output do sistema por variação das condições operacionais.

Em qualquer método de exploração, a simulação é especialmente aplicável ao subsistema de transporte dada a necessidade de estudar interferências desse processo cíclico com todas as operações elementares.

De facto, em jazigos heterogéneos (zonas «ricas» e «pobres») a interacção, por exemplo, do teor de corte com os custos de transporte (ligados à localização do ponto de descarga — rampas, correias transportadoras, poços) tem de ser considerada e podem simular-se diferentes combinações de blocos para diferentes estratégias de exploração e várias posições dos pontos de descarga, ensaiando uma optimização empírica sob certos constrangimentos.

Por outro lado, se se pretender reproduzir as interdependências entre o espectro granulométrico do minério desmontado em certas condições (diâmetro e disposição dos furos, explosivos, etc.) e o sistema de transporte, pode simular-se a influência dos blocos de grandes dimensões em estrangulamentos no processo de transporte e prever a dimensão óptima que mininize o custo global.

Assim, justifica-se que se trate o sub-sistema de *transporte* em especial, visto que nele se reflecte, como vimos, grande parte das interacções com outras operações unitárias. Por outro lado, o problema da afectação do equipamento às frentes é um problema típico de *transporte* e difícil de tratar por métodos «directos» (sem recorrer à simulação).

Para informação detalhada da simulação de métodos de exploração, ver [29], [30], [31], [32], [33], [34].

3.3.2. Transporte

É uma aplicação clássica da simulação o estudo do sistema de transporte. Uma vez estabelecido o grafo de rolagem (em que os pontos do grafo são constituídos pelos locais de carga e descarga, bifurcações, etc., e os arcos são constituídos pelas vias) é necessário afectar um certo número de transportadores (camiões, vagonas, correias, etc.) aos carregadores (scabers, «shovels», pás-carregadoras, etc.) e definir uma «disciplina» de tráfego (conjunto de regras que governam o sistema).

Na resolução deste tipo de problemas, a simulação torna-se o método mais adequado, dada a interacção dinâmica entre os elementos do sistema que pode levar à formação de filas de espera (por vezes móveis), ao aparecimento de tempos mortos, engarrafamentos, etc.

A partir da simulação podem formular-se modelos que respondam aos objectivos seguintes:

a) Qual a frota (tipo e quantidade) de transportadores que conduz a uma produtividade máxima (mínimo custo/tonelada).

b) Qual a organização do sistema («expedição» do transportador para pontos de carregamento variáveis ou afectação do transportador sempre ao mesmo carregador) que conduz a produtividade máxima.

c) Qual o perfil de rolagem que, para determinada frota, é mais aconselhável.

d) Qual o tipo de equipamento a adquirir para determinadas condições.

e) Qual o efeito da manutenção das vias e do equipamento na produtividade do sistema.

Suponhamos um grafo de rolagem simplificado como se esquematiza na Fig. seguinte

Consideremos em primeiro lugar o caso em que um certo número de transportadores está afectado sempre ao mesmo ponto de carregamento executando

(*) Neste caso o que se pretende não é «limpar» a variável de saída de factores interferentes, mas sim «ligá-la» a factores que controlem de algum modo o seu surgimento.

sempre o mesmo ciclo que se divide nos troços seguintes:

1. Tempo de carga;
2. Viagem até ao ponto de descarga;
3. Descarga;
4. Viagem até ao ponto de carga.

O tempo comum ao carregador e transportador é o tempo de carga e, enquanto o transportador executa o seu ciclo, o carregador retira o minério desmontado e prepara-se para nova carga.

Nestes ciclos existem variáveis aleatórias — tempo de carga e de descarga. O tempo de carga obedece, em geral, a uma lei normal ou lognormal, como se exemplifica na Fig. seguinte

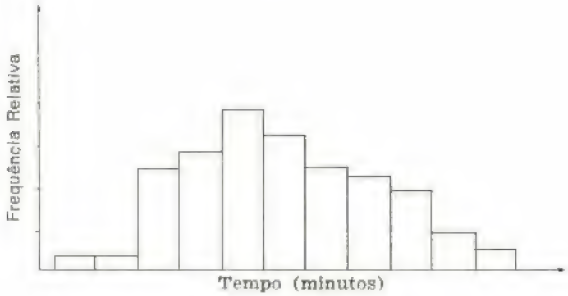


Fig. 7

Tempo de carga (segundo [35])

O tempo de descarga é em geral exponencial:

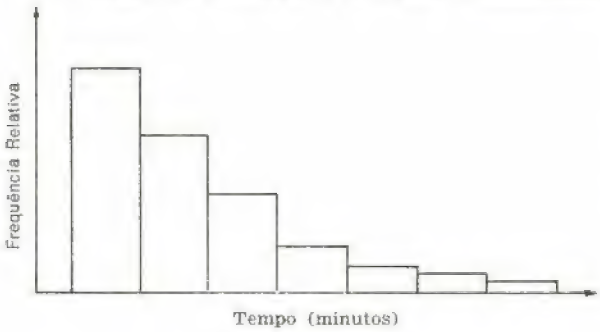


Fig. 8

Estes histogramas experimentais são obtidos da prática do funcionamento do sistema e são válidos apenas para aquela combinação transportador-carregador e para características do minério semelhantes. Deve tentar-se ajustar uma lei teórica para poupar espaço de memória.

Quanto aos tempos de viagem, alguns autores(*) usam uma simulação determinista baseada na curva característica do camião (ou da locomotiva). Esta curva permite determinar a força propulsora disponível às rodas em função da velocidade (e de outros parâmetros como o peso, declive e resistência à rolagem) e portanto, utilizando um método iterativo — num período de tempo curto, considera-se a aceleração constante e calcula-se a velocidade terminal que dá a força propulsora para o período seguinte e consequentemente a aceleração — é possível calcular os tempos de viagem para determinadas condições de rolagem.

No entanto, este método conduz sempre a estimações optimistas do tempo de viagem e é usual fazer uma correcção empírica (atribuindo uma certa % a mais pelos factores aleatórios) ou colher informação na prática que permita estabelecer também uma Lei de distribuição de probabilidade para esta variável.

Quanto à tonelagem carregada, esta varia em torno da capacidade teórica segundo uma lei normal.

O output da simulação será, por exemplo, os tempos mortos acumulados para cada unidade e a tonelagem total transportada durante um turno, o que permite, variando o número de transportadores a afectar a cada ponto de carregamento, dimensionar a frota para um custo/tonelada mínimo e prever possíveis modificações na organização do sistema de transporte. Quanto a este aspecto, o sistema de «expedição» é normalmente mais rentável(**). Este sistema implica a existência de um ponto de controle (e de um sistema de transmissões) que destina o transportador ao ponto de carregamento disponível ou àquele que o vai estar proximamente. É evidentemente um sistema flexível que se adapta melhor à variabilidade dos tempos de carga, à possibilidade de avarias nos carregadores e transportadores, etc. Há vários tipos de «expedição» que podem ser comparados entre si e com o método «fixo» pela simulação do sistema.

No programa de simulação têm de introduzir-se algumas restrições ou constrangimentos como sejam a velocidade máxima admissível por razões de segurança (especialmente em curvas e junções) e regras de ultrapassagem e cruzamento.

Seja qual for o sistema a simular e o output pretendido, é sempre necessário introduzir no programa um conjunto de regras lógicas que liguem entre si as *variáveis de estado* que são o tempo, as coordenadas e as produções. O tempo de cada unidade é gerado num «relógio» digital por acréscimos sucessivos segundo as leis de distribuição de probabilidade correspondentes a cada operação e esses tempos são comparados entre si e com um gerador independente (master clock) que fixa o tempo do turno.

Quanto ao sistema de registo dos tempos mortos e produções (contadores) este pode ser a intervalos constantes (time slicing) ou só quando se dão acontecimentos de interesse para o output (event sequencing).

Falta agora referir o problema de quantas interacções são necessárias para uma simulação (quantos turnos é preciso simular para ter uma certa con-

(*) Ver por exemplo, [35] e [37].
(**) Ver [37].

fiança no resultado). De facto, não é possível estabelecer, em geral, intervalos de confiança para simulações deste tipo (a variedade de situações é de tal ordem que não se pode aplicar o método esboçado em 2.4.). Neste momento entra de novo a ligação com a prática. Não se pode simular um sistema completamente desconhecido e portanto, durante a colheita de dados, faz-se também a estatística dos outputs que se pretendem simular. Antes de fazer qualquer modificação no sistema é necessário «correr» o programa nas condições em que os dados foram colhidos e verificar quantas iteracções são necessárias para que as distribuições do output «estabilizem» e se aproximem (estatisticamente) dos histogramas experimentais das mesmas variáveis. Esta comparação entre as distribuições simuladas e as reais pode ser feita por testes estatísticos clássicos (sobre a média, variância ou não paramétricos) para saber, com uma certa probabilidade, se as duas «amostras» se podem considerar provenientes da mesma população.

Para mais detalhes sobre simulação do transporte, ver [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41].

***

No método descrito anteriormente, considerou-se sempre que os tempos de carga podiam ser tomados como realização de uma variável aleatória independente com determinada lei de distribuição de probabilidade. No entanto, estatísticas disponíveis em algumas minas (ver, por exemplo, [37]) permitem concluir que, a tempos elevados, sucedem-se normalmente tempos elevados, o mesmo sucedendo a tempos curtos. Este facto experimental só pode ser interpretado pela regionalização espacial do minério que se reflecte na «aptidão ao carregamento». Na verdade, duas operações sucessivas de carga de minério proveniente de pontos vizinhos devem estar ligados por uma auto-correlação temporal que é o reflexo da regionalização espacial medida pelo variograma. Através da simulação condicional, este aspecto poderá ser tomado em conta.

Outro problema que não é considerado na simulação «clássica» das operações de transporte é que, por vezes, a variável de saída não é simplesmente a tonelagem descarregada (como foi considerado até aqui) mas um «índice de qualidade» do minério — teor, % de impurezas, etc.

Neste caso, há que relacionar a «regionalização de saída» dessa variável depois de o minério ter sofrido todas as operações de arranque, transporte, manipulações várias, etc., com a regionalização «in situ» dada pela simulação condicional. As operações intermédias podem ser tomadas como operadores cujas «funções de ponderação» regularizam a variável e transformam-na noutra V. R. cuja variabilidade é menor e cuja amplitude é maior. Ao simular um processo em que o minério vai sofrer homogeneização, este aspecto tem de ser considerado.

3.3.3. Planeamento global da exploração

Em jazidas de minérios complexos, como carbonatitos [43] ou taconites [44] é necessário planear rigorosamente a exploração no sentido de pesquisar qual a combinatória de blocos que obedece a determinados constrangimentos sobre índices de qualidade (limites mínimos e máximos em certos componentes, etc.).

Estes constrangimentos surgem como especificações de entrada na lavaria sobre teores ou outras características e é possível, se o número de blocos for comportável, simular várias combinatórias possíveis de modo a obter um output de minério desmontado que obedeça aos constrangimentos.

Por exemplo, no caso das taconites pode definir-se um índice global de qualidade do minério à entrada da lavaria como 1 ponto no espaço a n dimensões (uma por cada variável de que depende a qualidade, eventualmente ponderada — por exemplo, teor em magnetite, índice de Bond, rendimento, etc.) e definir uma «distância», nesse espaço, de cada bloco a esse ponto. Se a mina puder ser dividida em certas zonas onde cada pá carregadora se deve manter (diminuindo assim as possibilidades de escolha) é possível simular o output proveniente de várias pás trabalhando simultaneamente de modo a que a distância do índice de qualidade do minério «final» (obtido por composição dos diferentes blocos cujo fluxo é simultâneo para um ponto de entrada da lavaria) ao standard seja mínima. Numa determinada situação, é possível prever qual o bloco a que a pá carregadora se deve dirigir no «próximo» turno de modo a minimizar tal distância. A aplicabilidade do método depende do tempo de cálculo e só em certas hipóteses simplificadoras é vantajoso.

3.4. TRATAMENTO DE MINÉRIOS

Os processos de tratamento de minérios tem sido objecto de um grande número de trabalhos em que se pretende estabelecer um modelo que descreva o comportamento de certas variáveis, [45], [46], [47].

Sobre este modelo, que relaciona uma variável de saída Y com uma série de variáveis de entrada ou de controle, é sempre possível executar simulações deterministas, prevendo determinados resultados que levem à optimização do processo, [48], [49].

Não nos detendo sobre este aspecto, vamos considerar um exemplo em que se executa uma *simulação estocástica*.

Suponhamos que as flutuações previsíveis de algumas variáveis de entrada se podem prever e que o processo está sujeito a uma restrição do tipo: a variável de saída (por exemplo, o rendimento ou o teor do concentrado) não pode ser inferior a um determinado limite — ou melhor, fixa-se um risco para que essa variável seja inferior ao limite pretendido.

Concretizemos num exemplo tratado a partir de um modelo construído em [50] por análise factorial:

$$Y = 26.96 - 6.29\ x_2 + 3.96\ x_1\ x_2 - 6.63\ x_1\ x_3 + 5.09\ x_1\ x_2\ x_3$$

onde Y é a concentração de Pb (em %) num processo de flutuação.

As variáveis «independentes» são:

$x_1 = \dfrac{A_1 - 0.1}{0.05}$ onde A_1 é a concentração em xantato (lbs/ton)

$x_2 = \dfrac{A_2 - 1}{0.5}$ onde A_2 é a concentração em OCa (lbs/ton)

$x_3 = \dfrac{A_3 - 9}{1}$ onde A_3 é o pH

Admite-se agora que A_1 e A_2 são variáveis aleatórias de lei normal e que se conhece o desvio padrão

$$\sigma_{A_1} = 0.05\ E\{A_1\}$$

$$\sigma_{A_2} = 0.05\ E\{A_2\}$$

O valor máximo de Y obtém-se fazendo $x_1 = -1$ $x_2 = -1$ $x_3 = 1$ e é portanto possível regular o processo para este «óptimo» empírico no domínio de validade do modelo.

Suponhamos que a restrição imposta é a seguinte: Pretende-se que o teor em Pb tenha 2 % de probabilidade de ser inferior a 45 %. Nestas condições, visto que a flutuação de A_3 foi deixada «livre», o objectivo é calcular o desvio padrão tal que a restrição seja respeitada para imaginar um sistema de controle que assegure que a variável só seja inferior a $E\{A_3\} - 2\ \sigma_{A_3}$ com a probabilidade de 2.5 %

Este é um problema típico, artificialmente simplificado, em que a simulação estocástica é aconselhável dado o tipo de restrição imposta e o modelo relativamente complexo (devido às interacções que impedem o cálculo directo de variâncias).

O algoritmo utilizado para resolver o problema seguinte: Partindo do desvio padrão 0 (valor fixo de

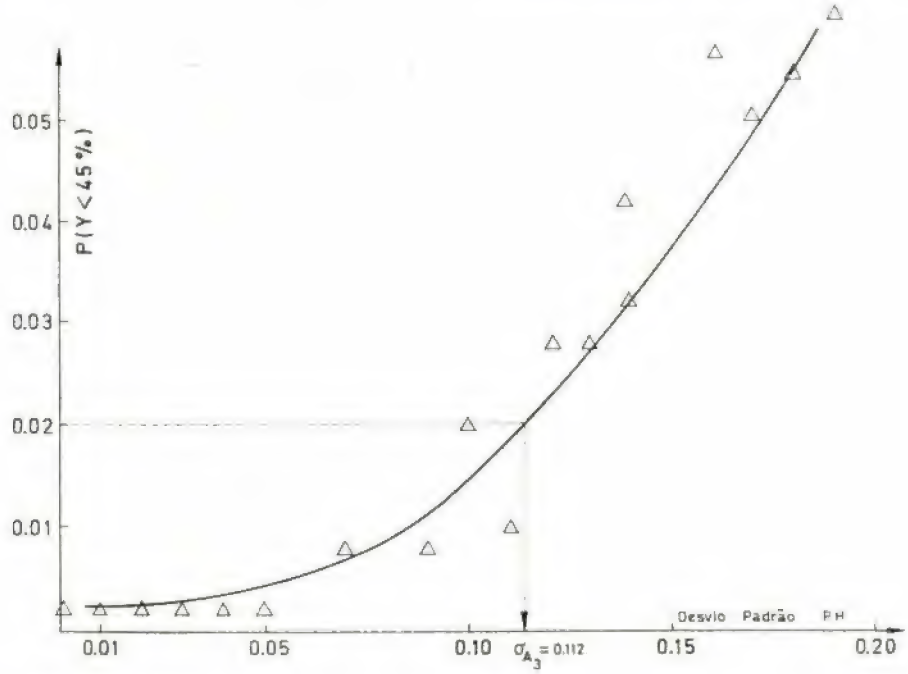


Fig. 9

A_3) foram-se dando incrementos sucessivos constantes e de pequeno passo e para cada incremento foi calculada uma distribuição de Y. Em cada distribuição, leu-se a probabilidade de Y ser inferior a 45 %. O resultado destas iterações sucessivas está esquematizado na Fig. 9.

3.5. Análise Económica de um projecto mineiro

Num projecto mineiro intervém um conjunto de variáveis que, no momento da avaliação, não são conhecidas completamente. Desde as reservas e teores que são V. R. cujos estimadores médios podem ser calculados pela Geoestatística, até aos preços de venda do metal, custos de produção e rendimentos, as variáveis económicas de base são conhecidas com determinados intervalos de confiança — trata-se de variáveis aleatórias cujas leis de distribuição de probabilidade, uma vez relacionadas entre si por um modelo, podem servir de base a uma simulação estocástica.

O modelo a construir relaciona um indicador económico — taxa de desconto interno, lucro, coeficiente de rentabilidade, valor acrescentado, etc. — com as variáveis económicas de que depende.

Amostrando as variáveis de entrada pelo Método de Monte Carlo, pode construir-se uma distri-

buição do indicador escolhido e, sobre esta, estabelecer, além do valor mais provável, o *risco* do projecto. Assim, associa-se ao parâmetro de decisão um conjunto de probabilidades de ele se tornar inferior a determinados limites (o risco reflecte a incerteza com que são conhecidas as variáveis de entrada no momento de tomar a decisão).

Este método de análise de projecto permite comparar diferentes alternativas, não só do ponto de vista do valor esperado do indicador, mas também do risco e efectuar análises de sensibilidade à variação da esperança e variância dos inputs.

Às variáveis de entrada tem de ser atribuída uma lei de distribuição de probabilidade.

No caso das variáveis «económicas» (custos e preços de venda) é usual estabelecer uma tendência (trend) de evolução previsível no tempo (visto que tem de se prever valores futuros) da esperança e limites de confiança (em geral o desvio padrão varia proporcionalmente à esperança, reflectindo o facto de as flutuações previsíveis aumentarem com o aumento do valor médio da variável).

Alguns autores, [52] utilizam distribuições triangulares baseadas em probabilidades subjectivas em que é atribuída a cada variável um valor modal, um mínimo e um máximo previsível.

Na construção do modelo há que ter o cuidado de assegurar a independência entre os diferentes inputs (ou estimar as correlações e introduzi-las no modelo).

Um método em que os valores do teor de corte e capacidade anual de produção que conduzem a um óptimo da taxa de desconto interno (medida pela esperança e diferentes níveis de risco) é descrito em [51].

Um exemplo de avaliação económico global de um projecto mineiro está reportado em [59]. Tomaram-se como variáveis aleatórias o teor do tal-qual, o custo de produção, o preço de venda e a taxa de desconto (com distribuições triangulares) e como índice de decisão o *coeficiente de rentabilidade* definido como

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Ro_i - Do_i \right)}{\sum_{i=1}^{N} Io_i}$$

onde R_{o_i}, D_{o_i}, I_{o_i} são, respectivamente, os valores actualizados das receitas, despesas e investimentos nos N anos do empreendimento.

A curva de repartição de R está representado na Fig. 9 e nela se pode estimar a esperança e desvio padrão do indicador (bem como a probabilidade de este tomar valores inferiores a certos limites, o que mede o *risco* do projecto).

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Princípios da Simulação

[1] **Nikiforuk, Zoerb** — «Analog Computer Simulation cf a Walking Dragline» — Society of Mining Engineers of AIME, Setember 1966 — p. 230/250.

[2] **B. Martinoli** — «Guida alla Simulazione» — Franco Agnelli, Milano, 1974.

[3] **K. D. Tocher** — «The Art of Simulation» — English University Press.

[4] **Harbauch, Boham-Carter** — «Computer Simulation in Geology» — Wiley Interscience.

[5] **Hammersley, Handscomb** — «Monte Carlo Methods», Methuen & Co.

[6] **Pereira, Muge, Cortez** — «Matemáticas aplicadas à Engenharia de Minas», IST, Lisboa, 1974.

[7] **Hahn, Shapiro** — «Statistical Models in Engineering» — Wiley.

[8] **Mutmansky** — A distribution-fitting Method for General Use, CIM Special Volume n.º 12 — 1971, p 486.

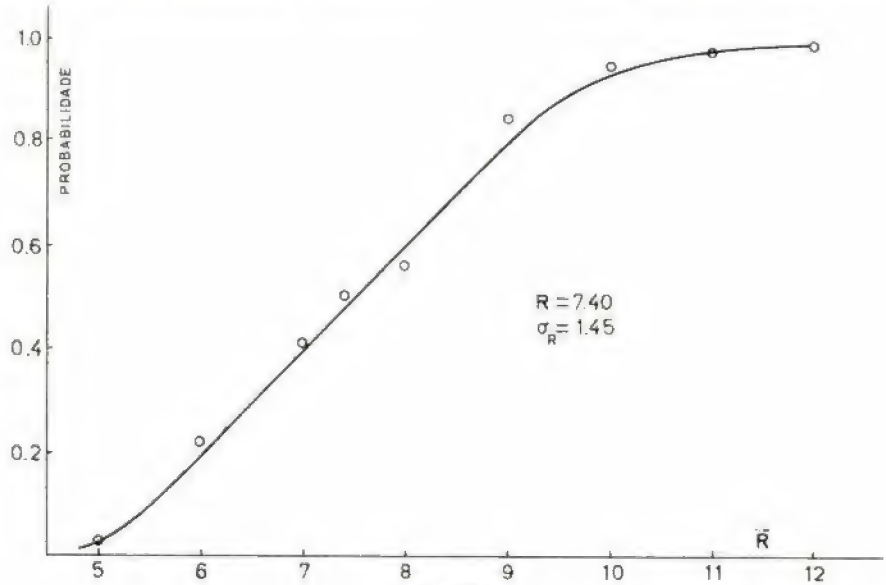


Fig. 9

Simulação Condicional

[9] **Matheron** — «Les variables Régionalisées et leur estimation» Masson & Cie, Paris, 1965.

[10] **Journel** — «Simulations Conditionelles», thèse presentée à l'Universiversité de Nancy I, 1974.

[11] **Journel** — «Geostatistics for conditional simulation of orebodies, *Ec. Geol.* vol. 69, 1974, p. 673.

[12] **Journel** — «Simulations de Gisements Miniers», Novembre 1973, *Revue de l'industrie minérale.*

[13] **David, Dowd, Korobov** — «Forecasting Departure from planning in open pit design and Grade Control» — 12th APCOM — GOLDEN F-131, 1974.

[14] **David** — «Tools for planning — variances and conditional expectations», 12th APCOM, 1974.

[15] **Alfaro, Huijbregts** — Simulation of a subhorizontal sedimentary orebody, 12th APCOM — Colden, 1974.

[16] **Journel** — Geostatistics and sequential exploraton, *Mining Eng.*, October, 1973.

Aplicações em Geologia

[17] **Vistelius** — Theory of formation of sedimentary beds in «*Studies* in *Mathematical Geology*», Consultants Bureau, New York.

[18] **Krumbein, Dacey** — Markov Chains and Embedded Markov chains in Geology, *Mathematical Geology*, vol. 1 n.° 1, 1969.

[19] **Schwarzacher** — The use of Markov chains in the study of Sedimentary cycles, *Mathematical Geology*, vol. 1, n.° 1, 1969.

[20] **Dacey, Krumbein** — Markovian Models in Stratigraphic Analysis, *Mathematical Geology*, vol. 2, n.° 2, 1970.

[21] **Harbaugh, Merriam** — Computer Applications in stratigraphic Analysis, Wiley, New York.

Aplicações em Prospecção

[22] **Dahlberg** — Use of Models for relating geochemical Prospecting data to geological attributs of a region, South Montain, Pennsylvania — *Col. School of Mines Quat.*, vol. 67, n.° 1, 1969.

[23] **Miesch, Connor, Eicher** — Investigation of geochemical sampling problems by computer simulation, *Col. School of Mines Quat.*, vol. 59, n.° 4, 1964.

[24] **Dahlberg** — Application of a selective simulation and sampling technique to the interpretation of stream sediment Copper Anomalies near South Montain, Pennsylvania, *Ec. Geol.*, 1968, p. 409-417.

[25] **Harris, De Verle** — Alaska's base and precious metal's ressources: a probabilistic regional appraisal, *Col. School of Mines Quat.*, vol. 64, n.° 3, July, 1969.

[26] **Whitney** — A ressource analysis based on Porphyry Copper Deposits and the cumulative Copper Metal Curve using Monte Carlo simulation — *Ec. Geol.*, vol. 70, 1975, p. 527-537.

[27] **De Geoffroy, Wu** — A statistical study of ore occurrences in the Greenstone Belts of the Canadian Shield — *Ec. Geol.*, vol. 65, 1970, p. 496-504.

[28] **De Geoffroy, Wignall** — Statistical Decision in regional exploration: application of regression and Baysian Classification Analysis in the Southwest Wisconsin Zinc area, *Ec. Geol.*, vol. 65, 1970, p. 769-777.

Aplicações em exploração

[29] **Subolesky, Lucas** — Simulation of room and pillar face minning systems — in a Decade of Digital Computing in the Mineral Industry, p. 373-384, 1969.

[30] **Chatterjee, Just** — Probabilististic simulation fragmentation and operating costs in sub-level open stoping, in 13th APCOM, R-II-1/14, 1975.

[31] **Wilke** — Integrated optimization of Production in a German Potash Mine — CIM, 1971, Special, vol. 12.

[32] **Manula, Rivell** — A master design simulation — in 12th APCOM, G-200, 1974.

[33] **Pye, Burne** — A generalized production sheduling system-in 12th, APCOM, C-22, 1974.

[34] **Wilke** — Simulation of production scheduling and haulage methods and cut-off determination for the «Megger» Lead Zine Mine — in 12th APCOM, C-105, 1974.

[35] **O'Neil, Manula** — Computer Simulation of materials handling in open pit mines, *Transactions of AIME*, June 1967, p. 137-146.

[36] **Nelson** — Simulation of a Mine Haulage Locomotive, *Colorado School of Mines Quat.*, 1964, vol. 59, n.° 4, p. 831-847.

[37] **Auriac, Engel, Ferry** — Étude du roulage général d'une exploitation miniére par simulation sur ordinateur, *Revue de l'Industrie Minérale*, Octobre, 1968.

[38] **Morgan, Peterson** — Determining shovel truck produtivity, *Mining Engineering*, December 1968.

[39] **Wilke** — Simulation Studies of computer-controled traffic in Underground Large Coal Mines, CIM special vol., n.° 12, 1971.

[40] **Redmon** — Solving Mine Haulage Problems by system simulation, *Quat. of the Colorado School of Mines*, vol. 54, n.° 4 ,1964.

[41] **Preller, Ramani** — Comparison of Monte Carlo and Deterministic Simulation techniques, in 13th APCOM, B-Vp. 1-10, 1975.

[42] **David, Pariseau** — Optimal assignment of trucks to shovels in open pit mines — in 13th APCOM B-II, p. 1-19, 1975.

[43] **Mendes** — Use of a simulation model for production planning at the Jacupiranga phosphate mine, in 13th APCOM, C-VI, p. 1-11, 1975.

[44] **Kaas** — A practical production scheduling model for taconite industry, *Trans. of the Society of Mining Engineers of AIME*, September, 1966, p. 281-285.

Aplicações em Preparação de Minérios

[45] **Somasundaram, Prickett** — Optimization of a flotation operation using statistical methods — *Trans. of the Society of Mining Engineers, AIME*, December, 1969, p. 369-377.

[46] **Calanog, Geiger** — How to optimize crushing and screening through Computer-aided design, *E/MJ*, May, 1973.

[47] **Splaine, Atkinson, Davidson, Smith** — Optimizing Medium — term Operational plans for a group of Copper Mines, *Journal of the South Af. Inst. of Min. and Met.*, June, 1972, p. 282--288.

[48] **Freeh, Horst, Adams, Kellner** — Simulation and analysis of closed-circuit grinding—*E/MJ*, August, 1973.

[49] **King** — Simulation of ore dressing plants — *Journal of the South Af. Inst. of Min. and Met.*, October, 1975, p. 152-156.

[50] **Mineral Processes:** their analysis, optimization and control, Ed. by A. L. Mullar and W. R. Bull, 1971, Colorado School of Mines, Golden.

Avaliação Económica de projectos mineiros

[51] **Makenzie, Bilodeau, Mascall** — The effect of uncertainty on the optimization of mine development, 12th APCOM, A-9, Golden, 1974.

[52] **Deshmukh** — Projects, Risks and Decisions — 12th APCOM, Golden, 1974, A-39.

[53] **Beasley, Tatman, Lawrence** — A program for the determination of the technical and economical feasibility of mining operations — 12th APCOM, Golden 1974, A-57.

[54] **Randall** — Constructing forecasting Models for Marketing Decisions, CIM special vol. 12, 1971.

[55] **Bergman, Me Lean** — Risk Analysis for evaluating Capital Investiment Proposals — CIM special vol. 12, 1971.

[56] **Olsen, Blaney** — Risk return Analysis through Probabilistic Forecasting—CIM special vol. 12, 1974.

[57] **Peiker, Forsythe** — Financial Analysis — Henderson Project, *Col. School of Mines Quat.* vol. 64, n.º 3, 1969.

[58] **Wells** — The investiment decision under incertainty, *Journal of the South Af. Inst. of Min. and Met.*, April, 1976.

[59] **Cortez, Pereira** — Análise do relatório do Grupo de Trabalho n.º 5 (Minérios de Tungsténio) — Nota interna CVRMUL, Lisboa, Julho, 1976.

TABELA I (segundo [7])

Números aleatórios uniformemente distribuidos

10 097	32 533	76 520	13 586	34 673	54 876	80 959	09 117	39 292	74 945
37 542	04 805	64 894	74 296	24 805	24 037	20 636	10 402	00 822	91 665
08 422	68 953	19 645	09 303	23 209	02 560	15 953	34 764	35 080	33 606
99 019	02 529	09 376	70 715	38 311	31 165	88 676	74 397	04 436	27 659
12 807	99 970	80 157	36 147	64 032	36 653	98 951	16 877	12 171	76 833
66 065	74 717	34 072	76 850	36 697	36 170	65 813	39 885	11 199	29 170
31 060	10 805	45 571	82 406	35 303	42 614	86 799	07 439	23 403	09 732
85 269	77 602	02 051	65 692	68 665	74 818	73 053	85 247	18 623	88 579
63 573	32 135	05 325	47 048	90 553	57 548	28 468	28 709	83 491	25 624
73 796	45 753	03 529	64 778	35 808	34 282	60 935	20 344	35 273	88 435
98 520	17 767	14 905	68 607	22 109	40 558	60 970	93 433	50 500	73 998
11 805	05 431	39 808	27 732	50 725	68 248	29 405	24 201	52 775	67 851
83 452	99 634	06 288	98 083	13 746	70 078	18 475	40 610	68 711	77 817
88 685	40 200	86 507	58 401	36 766	67 951	90 364	76 493	29 609	11 062
99 594	67 348	87 517	64 969	91 826	08 928	93 785	61 368	23 478	34 113
65 481	17 674	17 468	50 950	58 047	76 974	73 039	57 186	40 218	16 544
80 124	35 635	17 727	08 015	45 318	22 374	21 115	78 253	14 385	53 763
74 350	99 817	77 402	77 214	43 236	00 210	45 521	64 237	96 286	02 655
69 916	26 803	66 252	29 148	36 936	87 203	76 621	13 990	94 400	56 418
09 893	20 505	14 225	68 514	46 427	56 788	96 297	78 822	54 382	14 598
91 499	14 523	68 479	27 686	46 162	83 554	94 750	89 923	37 089	20 048
80 336	94 598	26 940	36 858	70 297	34 135	53 140	33 340	42 050	82 341
44 104	81 949	85 157	47 954	32 979	26 575	57 600	40 881	22 222	06 413
12 550	73 742	11 100	02 040	12 860	74 697	96 644	89 439	28 707	25 815
63 606	49 329	16 505	34 484	40 219	52 563	43 651	77 082	07 207	31 790
61 196	90 446	26 457	47 774	51 924	33 729	65 394	59 593	42 582	60 527
15 474	45 266	95 270	79 953	59 367	83 848	82 396	10 118	33 211	59 466
94 557	28 573	67 897	54 387	54 622	44 431	91 190	42 592	92 927	45 973
42 481	16 213	97 344	08 721	16 868	48 767	03 071	12 059	25 701	46 670
23 523	78 317	73 208	89 837	68 935	91 416	26 252	29 663	05 522	82 562
04 493	52 494	75 246	33 824	45 862	51 025	61 962	79 335	65 337	12 472
00 549	97 654	64 051	88 159	96 119	63 896	54 692	82 391	23 287	29 529
35 963	15 307	26 898	09 354	33 351	35 462	77 974	50 024	90 103	39 333
59 808	08 391	45 427	26 842	83 609	49 700	13 021	24 892	78 565	20 106
46 058	85 236	01 390	92 286	77 281	44 077	93 910	83 647	70 617	42 941
32 179	00 597	87 379	25 241	05 567	07 007	86 743	17 157	85 394	11 838
69 234	61 406	20 117	45 204	15 956	60 000	18 743	92 423	97 118	96 338
19 565	41 430	01 758	75 379	40 419	21 585	66 674	36 806	84 962	85 207
45 155	14 938	19 476	07 246	43 667	94 543	59 047	90 033	20 826	69 541
54 864	31 994	36 168	10 851	34 888	81 553	01 540	35 456	05 014	51 176
98 086	24 826	45 240	28 404	44 999	08 896	39 094	73 407	35 441	31 880
33 185	16 232	41 941	50 949	89 435	48 581	88 695	41 994	37 548	73 043
80 951	00 406	96 382	70 774	20 151	23 387	25 016	25 298	94 624	61 171
79 752	49 140	71 961	28 296	69 861	02 591	74 852	20 539	00 387	59 579
18 633	32 537	98 145	06 571	31 010	24 674	05 455	61 427	77 938	91 936
74 029	43 902	77 557	32 270	97 790	17 119	52 527	58 021	80 814	51 748
54 178	45 611	80 993	37 143	05 335	12 969	56 127	19 255	36 040	90 324
11 664	49 883	52 079	84 827	59 381	71 539	09 973	33 440	88 461	23 356
48 324	77 928	31 249	64 710	02 295	36 870	32 307	57 546	15 020	09 994
69 074	94 138	87 637	91 976	35 584	04 401	10 518	21 615	01 848	76 938

TABELA II (segundo [7])

Números aleatórios distribuidos segundo uma lei normal reduzida

1.276−	1.218−	0.453−	0.350−	0.723	0.676	1.099−	0.314−	0.314−	0.633−
0.318−	0.799−	1.664−	1.391	0.382	0.733	0.653	0.219	0.681−	1.129
1.377−	1.257−	0.495	0.139−	0.854−	0.428	1.322−	0.315−	0.732−	1.348−
2.334	0.337−	1.955−	0.636−	1.318−	0.433−	0.545	0.428	0.297−	0.276
1.136−	0.642	3.436	1.667−	0.847	1.173−	0.355−	0.035	0.359	0.930
0.414	0.011−	0.666	1.132−	0.410−	1.077−	0.734	1.484	0.340−	0.789
0.494−	0.364	1.237−	0.044−	0.111−	0.210−	0.931	0.616	0.377−	0.433−
1.048	0.037	0.759	0.609	2.043−	0.290−	0.404	0.543−	0.486	0.869
0.347	2.816	0.464−	0.632−	1.614−	0.372	0.074−	0.916−	1.314	0.038−
0.637	0.563	0.107−	0.131	1.808−	1.126−	0379	0.610	0.364−	2.626−
2.176	0.393	0.924−	1.911	1.040−	1.168−	0.485	0.076	0.769−	1.607
1.185−	0.944−	1.604−	0.185	0.258−	0.300−	0.591−	0.545−	0.018	0.485−
0.972	1.170	2.682	2.813	1.531−	0.490−	2.071	1.444	1.092−	0.478
1.210	0.294	0.248−	0.719	1.103	1.090	0.212	1.185−	0.338−	1.134−
2.647	0.777	0.450	2.247	1.151	1.676	0.384	1.133	1.393	0.814
0.398	0.318	0.928−	2.416	0.936−	1.036	0.024	0.560−	0.203	0.871−
0.846	0.699−	0.368−	0.344	0.926−	0.797−	1.404−	1.472−	0.118−	1.456
0.654	0.955−	2.907	1.688	0.752	0.434−	0.746	0.149	0.170−	0.479−
0.522	0.231	0.619−	0.265−	0.419	0.558	0.549−	0.192	0.334−	1.373
1.288−	0.539−	0.824−	0.244	1.070−	0.010	0.482	0.469−	0.090−	1.171
1.372	1.769	1.057−	1.646	0.481	0.600−	0.592−	0.610	0.096−	1.375−
0.854	0.535−	1.607	0.428	0.615−	0.331	0.336−	1.152−	0.533	0.833−
0.148−	1.144−	0.913	0.684	1.043	0.554	0.051−	0.944−	0.440−	0.212−
1.148−	1.056−	0.635	0.328−	1.221−	0.118	2.045−	1.977−	1.133−	0.338
0.348	0.970	0.017−	1.217	0.974−	1.291−	0.399−	1.209−	0.248−	0.480
0.284	0.458	1.307	1.625−	0.629−	0.504−	0.056−	0.131−	0.048	1.879
1.016−	0.360	0.119−	2.331	1.672	1.053−	0.840	0.246−	0.237	1.312−
1.603	0.952−	0.566−	1.600	0.465	1.951	0.110	0.251	0.116	0.957−
0.190−	1.479	0.986−	1.249	1.934	0.070	1.358−	1.246−	0.959−	1.297−
0.722−	0.925	0.783	0.402−	0.619	1.826	1.272	0.945−	0.494	0.050
1.696−	1.879	0.063	0.132	0.682	0.544	0.417−	0.666−	0.104−	0.253−
2.543−	1.333−	1.987	0.668	0.360	1.927	1.183	1.211	1.765	0.035
0.359−	0.193	1.023−	0.222−	0.616−	0.060−	1.319−	0.785	0.430−	0.298−
0.248	0.088−	1.379−	0.295	0.115−	0.621−	0.618−	0.209	0.979	0.906
0.099−	1.376−	1.047	0.872−	2.200−	1.384−	1.425	0.812−	0.748	1.093−
0.463−	1.281−	2.514−	0.675	1.145	1.083	0.667−	0.223−	1.592−	1.278−
0.503	1.434	0.290	0.397	0.897−	0.973−	0.120−	1.594−	0.996−	1.244−
0.857−	0.371−	0.216−	0.148	2.106−	1.453−	0.686	0.075−	0.243−	0.170−
0.122−	1.107	1.039−	0.636−	0.860−	0.895−	1.458−	0.539−	0.159−	0.420−
1.632	0.586	0.468−	0.386−	0.354−	0.203	1.234−	2.381	0.388−	0.063−
2.072	1.445−	0.680−	0.224	0.120−	1.753	0.571−	1.933	0.126−	0.034
0.435−	0.375−	0.985−	0.585−	0.203−	0.556−	0.024	0.126	1.250	0.615−
0.876	1.227−	2.647−	0.745−	1.797	1.231−	0.547	0.634−	0.836−	0.719−
0.833	1.289	0.022−	0.431−	0.582	0.766	0.574−	1.153−	0.520	1.018−
0.891−	0.332	0.453−	1.127−	2.085	0.722−	1.508−	0.489	0.496−	0.025−
0.644	0.233−	0.153−	1.098	0.757	0.039−	0.460−	0.393	2.012	1.356
0.105	0.171−	0.110−	1.145−	0.878	0.909−	0.328−	1.021	1.613−	1.560
1.192−	1.770	0.003−	0.369	0.052	0.647	1.029	1.526	0.237	1.328−
0.042−	0.553	0.770	0.324	0.489−	0.367−	0.378	0.601	1.996−	0.738−
0.498	1.072	1.567	0.302	1.157	0.720−	1.403	0.698	0.370−	0.551−

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.28:622

The conditional simulation of regionalized variables

PETER DOWD (*)

RESUMO

A teoria da simulação condicional de variáveis regionalizadas é introduzida e as propriedades da variável simulada são descritas.

O método das bandas rotativas para a simulação não condicional a três dimensões é apresentado, bem como a simulação a uma dimensão obedecendo a uma covariância dada e a um histograma experimental.

Os problemas de anisotropia, efeito de pepita e deriva são introduzidos na teoria e estudadas as modificações a realizar para que esses aspectos estruturais sejam tomados em conta.

Alguns exemplos são apresentados para ilustrar as aplicações da teoria.

SUMMARY

The conditional simulation theory of Regionalized Variables is introduced and the basic properties of the simulated variable are described.

The turning bands method for non-conditional simulation in a three-dimensional space is presented as well as the one-dimensional simulation generated by a given covariance function and experimental histogram.

Problems of anisotropy, nugget effect and drift are introduced in the theory and modifications for taking these structural features into account are done accordingly.

Some case stories are presented for application of the theory.

INTRODUCTION

Suppose that at the planning stage of a mining operation the deposit has been sampled on a given grid and from this information it is required to predict the fluctuations in mill feed grade so as to determine whether any blending will be necessary. Usually, the limited amount of data available from the sampling grid will be insufficient to predict these fluctuations.

The choice of mining equipment may depend on the daily fluctuations of the stripping ratio and again the available data will be insufficient to predict these fluctuations.

What would be the effects of stockpiling, various mining procedures or even different estimation methods for determining mining block grades?

To answer these questions would require knowledge of the measured variable at all points in the deposit. As this is obviously impossible, an alternative would be to simulate the measured variable at all points in the deposit in such a way that it conforms to the known characteristics of the variable as deduced from the available data.

However, it must always be born in mind that simulation is *not* estimation — its purpose is to provide unbiased variances.

These notes are based on *Journel (1974)* (reference number [1]) and this source quoted freely in the text.

THE PROPERTIES OF A CONDITIONAL SIMULATION

The available information about the deposit consists of:

1 — The values $z(x_i)$ at each of the sampling locations.

2 — The spatial autocorrelations between data $z(x_i)$ and $z(x_j)$. These autocorrelations are expressed in the form of a covariance or variogram function.

3 — The experimental histogram of the data values.

Thus, the simulated variable, $z_c(x)$ must:

1 — Be equal to the experimental value at each of the data locations, i. e. $z_c(x_i) = z(x_i)$, $\forall\ x_i \in S$. In other words, the simulation is *conditional* to the data;

2 — have the same spatial autocorrelation as the data values i. e. the same covariance or variogram;

(*) B. Sc. M. Sc. A., M. I. M. M., M. Can. I. M. M., Ph. D.
Department of Mining and Mineral Sciences
University of Leeds

3 — have the same histogram as that of the data values.

THE THEORY OF CONDITIONAL SIMULATION

At each point x in the deposit (D) the neighbouring data values, $z(x_i)$, can be used to form a kriged estimate, $z_k^*(x)$, of the true value $z(x)$:

$$z_k^*(x) = \sum_i \lambda_i \, z(x_i)$$

The difference between the kriged value and the true value is the kriging error:

$$e_k(x) = z(x) - z_k^*(x)$$

i. e.

$$z(x) = z_k^*(x) + e_k(x)$$

Now, if all these values are considered as realisations of random functions, $Z(x)$, $Z_k^*(x)$, $E_k(x)$, then the kriging error is orthogonal to the kriged estimate, i. e. $E\left[Z_k^*(x) \; E_k(x') \right] = o$.

Now consider realisations, $z_s(x)$, of another random function, $Z_s(x)$, which has the same expectation and covariance as $Z(x)$ but is independent of it. $Z_s(x)$ could result from *non-conditional* simulations of $Z(x)$ i.e. a simulation that simply ensured the same expectation and covariance.

Using the values of $z_s(x)$ at each of the same data locations $x_i \in S$, each location $x \in D$ can be kriged to give an estimated value, $z_{s,k}^*(x)$:

$$z_{s,k}^*(x) = \sum_i \lambda_i \, z_s(x_i)$$

where the weights λ_i are the same as the previous set of weights because the same data pattern is being used.

This leads to the following expression:

$$Z_s(x) = Z_{s,k}^*(x) + E_{s,k}(x)$$

where the kriging error, $E_{s,k}(x) = \left[Z_s(x) - Z_{s,k}^*(x) \right]$ has the same expectation and covariance as $E_k(x)$ and thus the random function:

$$Z_c(x) = Z_k^*(x) + E_{s,k}(x)$$

has the same expectation and covariance as $Z(x)$. This last random function is obtained by adding the kriging error $E_{s,k}(x) = \left[Z_s(x) - Z_{s,k}^*(x) \right]$ to the kriged estimate $Z_k^*(x)$ of the initial random function $Z(x)$. These results are due to the orthogonality property mentioned above.

We now have a method for conditional simulation which can be summarised as follows:

1 — Carry out a non-conditional simulation of the regionalised variable for all locations $x \in D$. This results in a set of values $\{z_s(x), \forall \; x \in D\}$. These simulated values have the same expectation and covariance as the data values $\{z(x_i), \forall \; x_i \in S\}$.

2 — Using the data values $z(x_i)$ at the sampling locations $x_i \in S$ krige all locations $x \in D$. This provides a second set of values $\{z_k^*(x), x \in D\}$. Remember from the exact interpolation property of kriging that

$$z_k^*(x_i) = z(x_i) \qquad \forall \; x_i \in S$$

3 — Using the simulated values $z_s(x_i)$ at the sampling locations $x_i \in S$, krige all locations $x \in D$. This provides a third set of values $\{z_{s,k}^*(x), x \in D\}$. Remember from the exact interpolation property of kriging that

$$z_{s,k}^*(x_i) = z_s(x_i) \qquad \forall \; x_i \in S$$

Then the realisations:

$$z_c^*(x) = z_k(x) + \left[z_s(x) - z_{s,k}^*(x) \right]$$

are conditional to the real experimental data since at any data location $x_i \in S$:

$$z_s(x_i) = z_{s,k}(x_i) \qquad \text{and} \qquad z_k^*(x_i) = z(x_i)$$

and therefore:

$$z_c(x_i) = z(x_i) \qquad \forall \; x_i \in S$$

In addition, the corresponding random functions $Z_c(x)$ and $Z(x)$ have the same expectation and covariance.

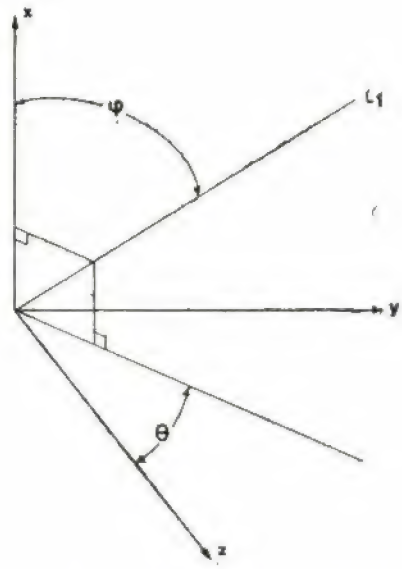
NON-CONDITIONAL SIMULATION: THE TURNING BANDS METHOD

This section deals with the generation of a realisation $z_s(x)$, of the random function $Z(x)$ with a given covariance.

The turning bands method consists of reducing any three-dimensional simulation to simple one-dimensional simulations on lines that turn in the three-dimensional space. The method was developed by

Matheron and colleagues at the Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau [1], [2], [9].

→ Consider the line L_1 defined by the unit vector u_1 in the three-dimensional space as shown in the following figure:



On line L_1 consider a one dimensional random function $Y(u_1)$ which is second order stationary with a zero expected value $E(Y) = 0$ and has a one-dimensional stationary covariance $C_1(h_{u_1})$.

Let $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ represent a unit system of orthogonal axes and (h_u, h_v, h_w) be the projection of vector $\vec{h}$ on these axes.

The three-dimensional random function $Z(u, v, w)$ defined by

$$z(u, v, w) = y(u)$$

is also second order stationary with zero expected value and a three-dimensional covariance of:

$$C_3\ (h_u, h_v, h_w) = C_1(h_u)$$

In practice, to generate a realisation z of Z, the value of the one-dimensional realisation y(u) at the point u on line L_1 is assigned to some given small interval centred on the point u. This interval is then projected at right angles to L_1 into the three-dimensional space. Every grid point that falls within this interval, or band, then receives the value y(u). This is illustrated in two dimensions in. Fig. 1.

Suppose that we wish to simulate a given regionalised variable at each of the grid points marked X.

On line L_1 we generate the values of $y_1(u_i)$ at each of the points (•). These points are regularly spaced at an interval b. These intervals are then projected at right angles into the two dimensional space. Grid point 1 receives the value of $y_1(u_2)$, grid points 2,7 and 13 receive the value $y_1(u_3)$ and so on.

In the three-dimensional space the intervals are projected by means of planes as shown in. Fig. 2.

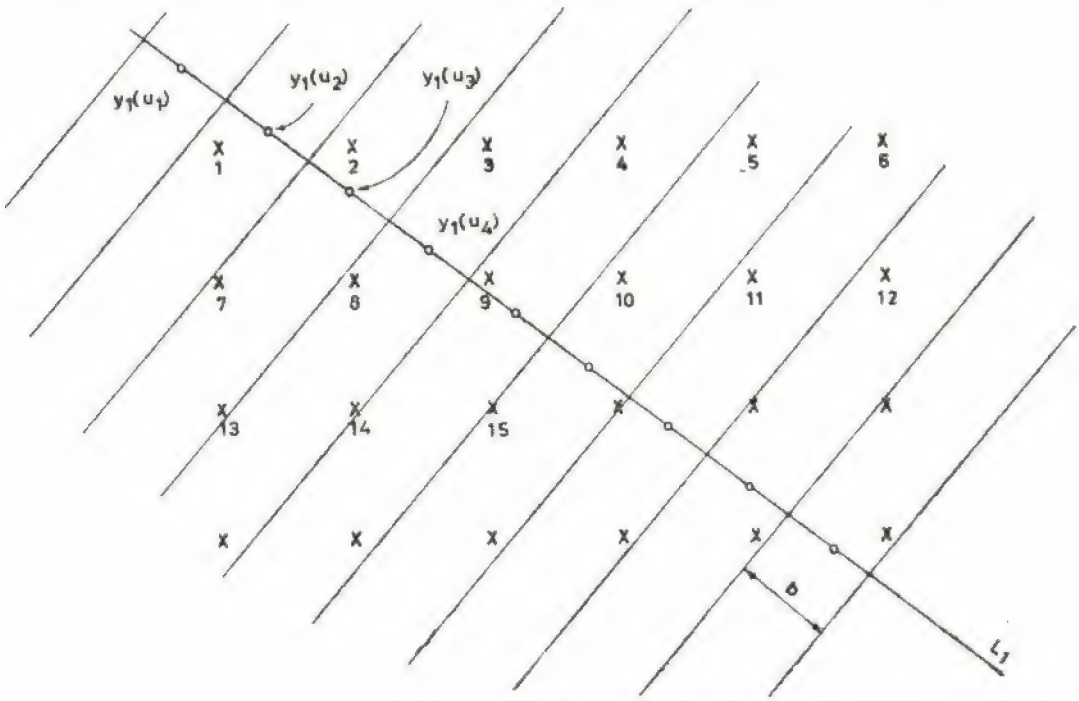


Fig. 1

All grid points that fall within the band centred on the plane $\{u_i = \text{constant}\}$ receive the value $y(u_1)$.

We then consider N directions $u_1, u_2 \ldots u_N$ uniformly distributed on the unit sphere. A new realisation $y(u_i)$ of a random function Y_i, equivalent to Y,

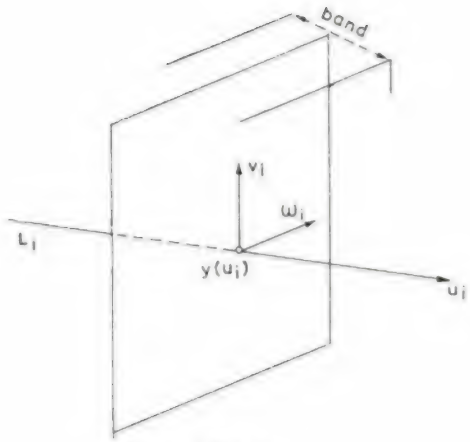


Fig. 2

is generated on every line L_i, the N random functions (Y_i, $i = 1, N$) being independent. For every one-dimensional realisation $y(u_i)$ there is a corresponding three-dimensional realisation $z_i\ (u_i, v_i, w_i) = y(u_i)$.

We then consider the sum

$$z = \sum_{i=1}^{N} z_i$$

which is a realisation of a three-dimensional random function $Z(x_1\ x_2, x_3)$ which is second order stationary with a zero expected value and a covariance which tends towards the following isotropic covariance as the number of lines, N, tends towards infinity:

$$C_3(h_1, h_2, h_3) = C(h) = \int_{\frac{1}{2}\ \text{unitsphere}} C_1\ (< \vec{h}, \vec{u} >)\ du$$

where $< \vec{h}, \vec{u} > = h_u$ denotes the projection of vector **h** on axis **u** and $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$ is the modulus of vector **h**.

The above integral can be written in terms of spherical co-ordinates as:

$$C(h) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} C_1\ (\,|h\cos\varphi|\,)\ \sin\varphi\ d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{h} \int_0^h C_1(s)\ ds$$

which can be inverted to give:

$$C_1\ (s) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{\partial}{\partial s}\ s\ C(s)$$

In practice N is never infinite. The method adopted at the Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau is to take the lines that join the mid-points of opposite edges of a regular icosahedron.

The sum

$$z = \sum_{i=1}^{15} z_i$$

will then have the covariance:

$$C'(h) = \sum_{i=1}^{15} C_1\ (< \vec{h}, \vec{u}_i >)$$

which will differ from the limit covariance

$$C\ (h) = \frac{2\pi}{h} \int_0^h C_1\ (s)\ ds$$

The approximate relationship between these two covariances is

$$C'(h) \approx \frac{15}{2\pi}\ C(h)$$

In summary, to generate realisations $z(x_1, x_2, x_3)$ of a random function $Z(x_1, x_2, x_3)$ with an isotropic three-dimensional covariance function C(h):

(1) — Find the corresponding one-dimensional covariace function C_1 (h).

(2) — generate realisations, $y_i\ (u_j)$, of the one-dimensional random function $Y_i\ (u_j)$ which has a covariance $C_1(S)$ on each of the $\{L_i, i = 1, 15\}$ lines.

(3) — project these realisations into the three-dimensional space and sum them on the simulation grid locations.

The only remaining problem is the determination of $C_1(s)$ and the generation of the realisations of the one-dimensional random functions Y (u) where

$$C_1(s) = E\,\{Y(u)\ Y\ (u + s)\}$$

and

$$E\,\{Y(u)\} = o$$

ONE DIMENSIONAL SIMULATIONS

The most general method for generating these 1-D realisations is by means of spectral analysis but in practice this may require very difficult Fourier transforms. Simple methods exist for the particular cases in which the covariance C_1 (s) can be written

as a convolution product of a known function f(u) by its transpose

$$C_1(s) = f * \check{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, f(u+s)\, du$$

Then a moving average method with weighting function f(u) can be used to generate the Y(u). We start with a stationary 1–D random measure T(dv). Then for each measure T(dv) there is an associated 1–D random function Y(u) defined by:

$$Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+v)\, T(dv)$$

is a stationary random function with covariance

$$C_1(s) = f * \check{f}$$

SOME EXAMPLES

(1) The spherical covariance

The three-dimensional spherical covariance function is written as

$$C(h) = \begin{cases} K\left(1 - \dfrac{3h}{2a} + \dfrac{h^3}{2a^3}\right) & h \leq a \\ 0 & h > a \end{cases}$$

now in the one dimensional space:

$$C_1(s) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}\, s\, C(s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}\, s K\left(1 - \frac{3s}{2a} + \frac{s^3}{2a^3}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{K}{2\pi}\left(1 - \dfrac{3s}{a} + \dfrac{2s^3}{a^3}\right) & s \leq a \\ 0 & s > a \end{cases}$$

This covariance can be expressed as the convolution product:

$$C_1(s) = f * \check{f}$$

where the weighting function is:

$$f(u) \begin{cases} \sqrt{\dfrac{6K}{\pi a^3}} \cdot u & -a/2 \leq u \leq a/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

demonstration:

$$C_1(s) = f * \check{f} = \int_{-a/2+s}^{a/2} f(u)\, f(u+s)\, du =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{6K}{\pi a^3}}\right)^2 \int_{-a/2+s}^{a/2} u\,(u+s)\, du =$$

$$= \frac{6K}{\pi a^3}\left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2 s}{2}\right]_{-a/2+s}^{a/2} =$$

$$= \frac{K}{2\pi}\left(1 - \frac{3s}{a} + \frac{2s^3}{a^3}\right)$$

Thus, neglecting the multiplicative factor $\sqrt{\frac{6K}{\pi a^3}}$ the 1–D random function, Y(u), for the spherical covariance function is expressed as:

$$Y(u) = \int_{u-a/2}^{u+a/2} (u-y)\; T(dy)$$

In practice, this procedure consists of assigning a value, Z_i, drawn at random from a uniform distribution, to each of a set of points x_i marked at regular intervals along the line. Then to each point x_i the value

$$y_i = \sum_{k=-a/2}^{a/2} k\, Z_{i+k}$$

is assigned.

(2) The exponential covariance

$$C(h) = K e^{-ah} \qquad , \forall\, h \geq 0$$

now,

$$C_1(s) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}\, s\, C(s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}\, s K e^{-as} =$$

$$= \frac{K}{2\pi}(1 - as)\, e^{-as} \qquad , \forall\, s \geq 0$$

This covariance can be expressed as the convolution product:

$$C_1(s) = f * \check{f}$$

where the weighting function is:

$$f(u) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2Ka}{\pi}}\,(-au)\, e^{-au} & u \geq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$$

In practice, this procedure consists of assigning a value Z_i, drawn at random from a uniform distribution, to each of a set of points x_i marked at regular intervals along the line. Then to each point x_i the value

$$y_i = \sum_{k=0}^{n} (1 - a\,k)\, e^{-a\,k}\, Z_{i+k}$$

is assigned.

GEOMETRIC ANISOTROPY

Thus far we have dealt with covariance functions which are isotropic in the three-dimensional space. In fact, the derivation of the one-dimensional covariance function from the three-dimensional covariance function assumes isotropy and the derivation is practically impossible unless this assumption is made. However, in practice a reasonable approximation can usually be made by calculating the ranges $\{a_i, i=1,15\}$ corresponding to each of the $\{L_i, i=1,15\}$ lines.

An alternative is to simulate an isotropic covariance function on a given grid and then multiply this grid by the ratio of anisotropy. In two dimensions (for the sake of a simple example) if the range is twice as long in the E/W direction than in the N/S direction then the co-ordinate system would be transformed by multiplying the E/W grid spacing by two.

THE NUGGET VARIANCE

The nugget constant appears as a random component of the total variance — it represents a microstructure of very small range i.e. practically no spatial auto-correlation.

It can be simulated by drawing numbers from a uniform distribution with a variance equal to the nugget constant. A uniform distribution on the interval [o, x] has a variance equal to $\frac{x^2}{12}$. Therefore, if the nugget constant is C_o we draw numbers from a uniform distribution on the interval $[o, \sqrt{12\,C_o}]$.

ZONAL ANISOTROPY

If, for example, the variogram function consists of an isotropic component, $\gamma_1(h)$, in the three-dimensional space and a second component, $\gamma_2(\sqrt{h_x^2 + h_y^2})$, depending only on the horizontal distance, then these two components can be simulated independently and the resulting realisations added together.

SPECIFYING A HISTOGRAM

Thus far we have satisfied the first two conditions of the conditional simulation process i.e. conditionality, and covariance. The final condition is to ensure that the histogram of the simulated values is the same as that of the data values.

As we are summing a large number of values on each line the resulting realisations, $z(x)$, will tend to follow a normal distribution because of the central limit theorem.

In general, to impose a given histogram on the simulated values we must find some transform, ϕ, which will transform the data values to values which follow a normal distribution:

$$y(x_i) = \phi[z(x_i)] \qquad \forall\ x_i \in S$$

where $y(x)$ follow a standard normal distribution.

We then determine the covariance function corresponding to the $y(x_i)$ and simulate these values. When the simulation is completed we take the inverse transform:

$$z_c(x) = \phi^{-1}[y_c(x)] \qquad \forall\ x \in D$$

The values $z_c(x)$ will then have the required histogram and covariance function.

The transform, ϕ, can be achieved in a number of ways. When a known distribution can be fitted to the data, the transform can be simply determined. For example, if it is known that the data follow a lognormal law then the transform is achieved by taking logarithms:

$$y(x_i) = \log[z(x_i)] \qquad \forall\ x_i \in S$$

We determine the covariance function of the $y(x_i)$ and simulate the values, $y_c(x)$, $x \in D$. When the simulation has been completed we take the inverse transform:

$$z_c(x) = {}_c y_c(x) \qquad \forall\ x \in D$$

The values $z_c(x)$ then follow a log-normal distribution and have the required covariance.

When an exact distribution function cannot be fitted to the experimental histogram, a graphical transform using the familiar Monte Carlo techniques can be employed.

The most general method is to use hermite polynomials to obtain a numerical transform. The hermite polynomials are defined by:

$$H_n(x) = e^{x^2/2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2/2}\right]$$

Now if the random function $Z(x)$ is strictly stationary and has a distribution function $F(z)$ then a transform, ϕ, and its inverse, ϕ^{-1}, can always be found such that

$$Z(x) = \phi[Y(x)] \text{ and } Y(x) = \phi^{-1}[Z(x)]$$

where the random function $Y(x)$ has a standard normal distribution.

The transform ϕ can be expressed in terms of hermite polynomials as

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$$

where the weights ψ_n are given by:

$$\psi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) H_n(y) g(y) dy$$

and $g(y)$ is the standard normal density function and $y = y(x)$

Now $Z(x) = \phi[Y(x)]$ implies that $F(z) = G(y)$ where $F(z)$ and $G(y)$ are the cumulative distribution functions of Z and Y respectively. The values of the transform can be determined for $\forall\ x_i \in S$, from:

$$z(x_i) = \phi[y(x_i)]$$

where $y(x_i)$ are defined by

$$F[z(x_i)] = G[y(x_i)]$$

Knowing the pairs of values $[z(x_i), \phi[y(x_i)]]$. It is a simple matter to use any standard numerical integration method to obtain estimates of the weights ψ_n. The transform $\phi(y)$ is expanded up to order N where N depends on the shape of the distribution (experimental histogram) of the $z(x_i)$. Terms up to and including ψ_6, and large sample sizes are needed (and will almost always provide) a good approximation to $\phi(y)$. Fewer terms and small samples can lead to a poor approximation, including negative probabilities.

The hermite expansion of $\phi(y)$ should be such that:

$$\psi_o = m \text{ and } \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n^2}{n!} = \sigma^2$$

where m and σ^2 are the mean and variance of the $z(x_i)\ \forall\ x_i \in S$.

Once the function $\phi(y)$ has been determined as a hermite expansion, the equation $z(x_i) = \phi[y(x_i)]$ ca be solved numerically or graphically for each $z(x_i)$ to determine the inverse transform, $\phi^{-1}(z)$.

SIMULATING VARIOUS VOLUMES

Usually the available structural information will be on a particular support such as drill cores. Using this information we may wish to simulate drill cores of various lengths, blocks of various sizes and other types of samples. One method of doing this is to deduce the structural characteristics for a point support and simulate the variable on a point support. Various volumes can then be simulated by averaging the values on all points which fall within these volumes

A more direct way is to assume invariance of the type of distribution for various lot sizes. For example, if the point support distribution is lognormal then the block-support distribution will also be lognormal with the same mean but a smaller variance. This is known as the permanent (or invariant) law hypothesis [14].

As before it is assumed that the sample grade values $z(x)$ can be expressed as standard normal transforms:

$$z(x) = \phi[y(x)]$$

which can be expressed in terms of hermite polynomials as:

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{n!} H_n(y)$$

Suppose that the required block grades are $z(v)$, $v \in D$. The invariant distribution hypothesis amounts to assuming that the standard normal transform, ϕ_v, of the $z(v)$:

$$z(v) = \phi_v[w(v)]$$

has the same hermite polynomial expansion as ϕ except for a correction factor:

$$\phi_v(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n c_n}{n} H_n(w)$$

The c_n can be determined from the variance relation of the hermite polynomials [11].

The most general way of estimating block grade distribution is by means of transfer functions [10], [11], [12]. The (direct) transfer function of blocks v_j in the deposit (or zone) D, where $D = Uv_j$ is the conditional distribution of the block grades, $z(v_j)$, given the sample grades $z(x_i)$, $x_i \in S$.

Determination of a transfer function consists of forming a disjunctive kriging estimator of the probability density function of the block grades given the sample grades. A full account of disjunctive kriging (d.k.) can be found in [10] and [13].

The disjunctive kriging estimator of the transfer function (or the psuedo-density function) of the blocks v_j is

$$f_{dk}(s) = g(s) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(s)}{n!} \sum_{x_i \in S} \lambda_n^i H_n[y(x_i)] \right]$$

where g(s) is the standard normal density function and the coefficients λ_n^i are determined by solving the following system n = 1, 2, ... N times:

$$\sum_i \lambda_n^i \rho^n [y(x_i), y(x_k)] = \overline{r^n [y(x_k), w(v)]} \qquad \forall k$$

where $\rho(h)$ is the covariance function of the standard normal variable y(x) and

$$\rho^n [y(x_i); y(x_k)] = [\rho(x_i - x_k)]^n$$

r(h) is the covariance function between the standard normal variables w(v) (blocks) and y(x) (samples) and $\overline{r^n [y(x_k), w(v)]}$ is the mean value of $r\ (x_k - v_j)$ $\forall\ v_j \in D$.

DRIFT

Sometimes the spatial variation of the simulated variable include a directional trend due, for instance, to progressive impoverishment or enrichment towards the borders of the deposit. In this case, the random function Z(x) can be considered as the sum of two random functions:

$$Z(x) = T(x) + R(x)$$

where T(x) represents the trend and R(x) is the residual fluctuation around the trend.

Realisations of the trend and its residuals are simulated independently, see, for instance, [15].

EXAMPLE 1

This first simulation [6] was carried out to forecast departures from planning in open pit design and grade control.

Using the known characteristics of a porphyry copper deposit a simulation of the copper grades on point supports was carried out.

The variogram of the point grades was isotropic in the horizontal plane with a range of 400 ft while the vertical range was 100 ft. There was a nugget constant of 0.05 $(\%)^2$ Cu and a total variance of 0.20 $(\%)^2$ Cu The mean grade was 1.19 % Cu.

A total of 67,200 points were simulated on a 50 ft × 50 ft × 12 ft grid over a field measuring 2000 ft × 2000 ft × 504 ft. The variograms resulting from the simulation are shown in. Fig. 3.

These simulated points were averaged along 50 ft lengths to simulate drill cores on various drilling grids. Points within blocks measuring 100 ft × 100 ft × 100 ft were averaged to provide one possible set of «real» block values.

Various estimation methods, such as inverse-squared distances and kriging, were then used to estimate the blocks and calculate grade/tonnage curves. These estimates were then compared with the «real» values.

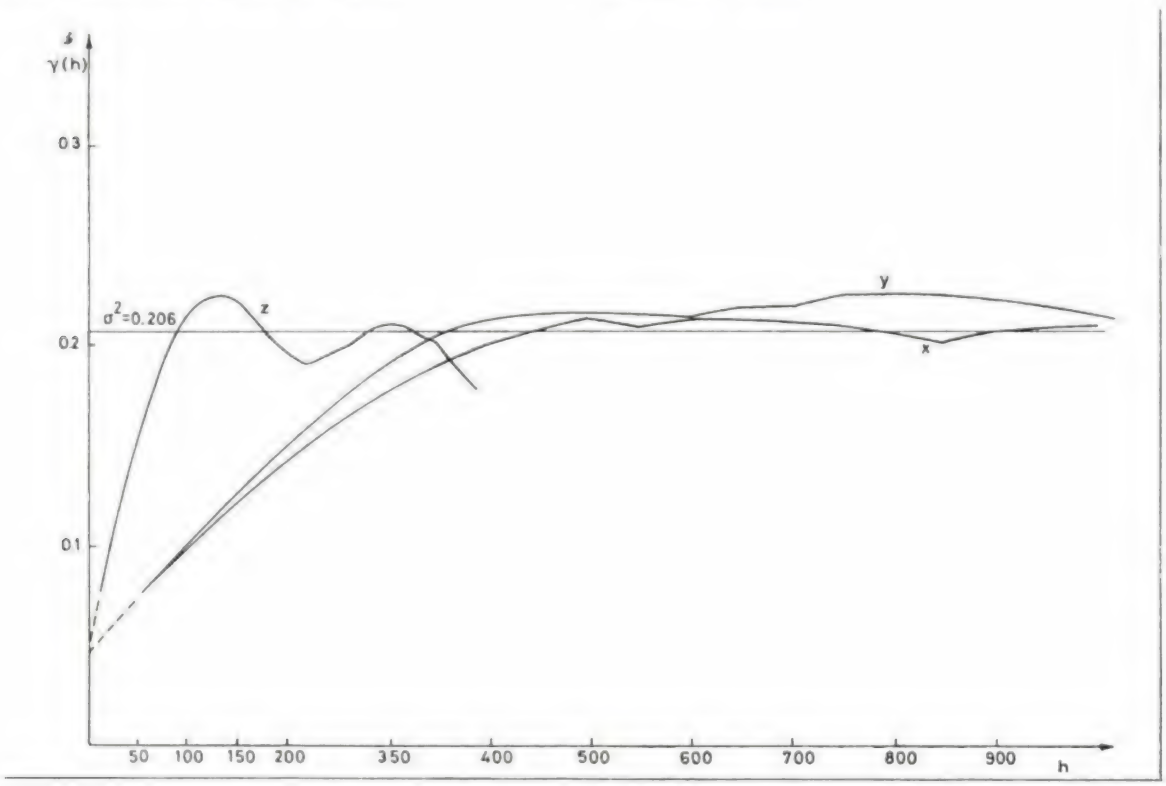


Fig. 3

The blocks were then kriged on different drilling grids and the resulting estimates were used to determine optimal open pits.

The full study can be seen in reference [6]

EXAMPLE 2

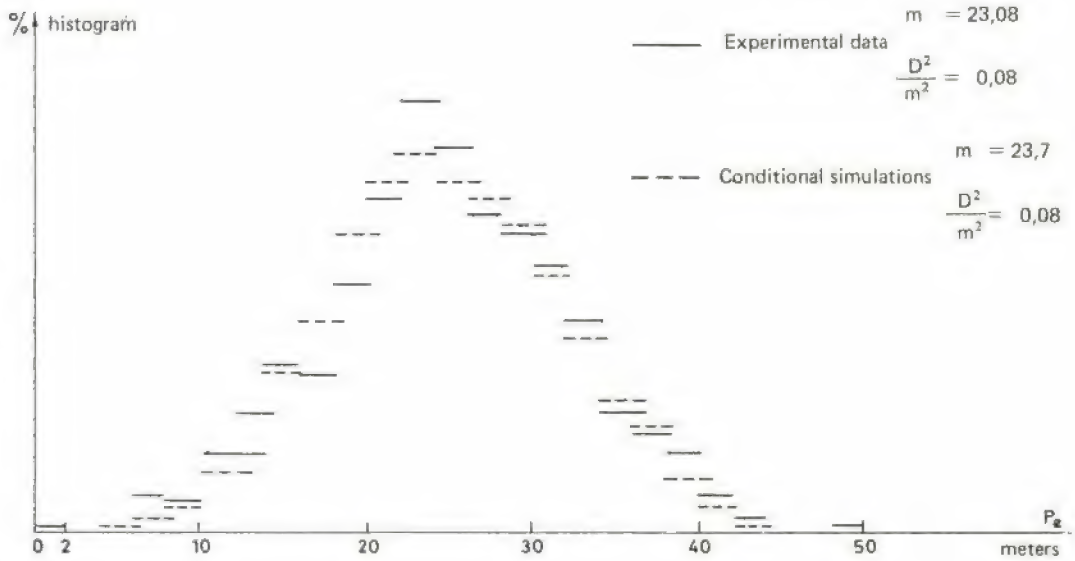
This example is taken from **Journel** [1] and concerns the Prony nickel deposit in New Caledonia.

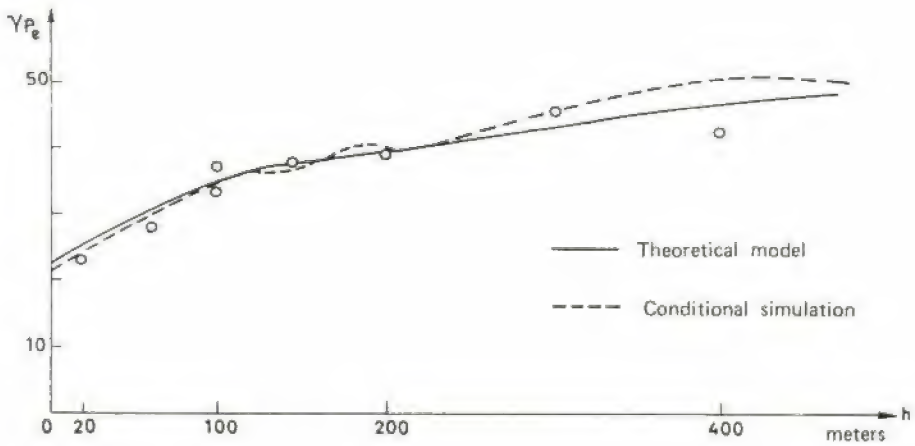
A total of 176 cores from boreholes on a 100 m grid were available. This data was to be used to predict flutuations in grades and stripping ratios. As this information was insufficient a conditional simulation was carried out on a 10 m grid providing a total of 17,600 drill cores.

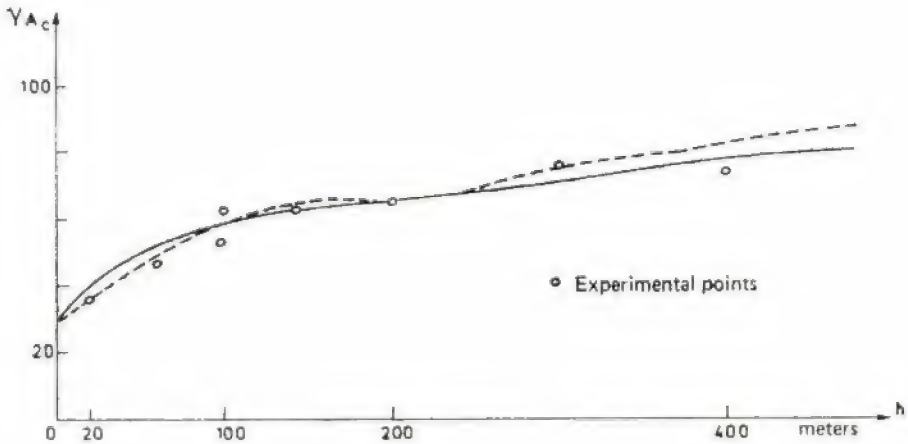
The variables simulated were

overburden thickness
mineable thickness
Nickel metal accumulation over the mineable thickness.

A summary of the main results is shown in the following figure.







From **Journel** [1].

REFERENCES

[1] — **Journel, A.** (1974). «Geostatistics for Conditional Simulation of Orebodies». *Economic Geology*, volume 69, 1974.

[2] — **Journel, A.** (1974). «Simulations Conditionelles», thèse presentée à l'Université de Nancy.

[3] — **Journel, A.** (1973). «Simulations de gisements miniers». *Revue de l'industrie minerale*, Novembre 1973.

[4] — **Matheron, G.** (1972). «Note Geostatistique 120: Quelques aspects de la montee». Fontainebleau, Janvier 1972.

[5] — **Marechal, A.** (1972). «El Problema de la Curva Tonelaje — Ley de corte y de su estimacion». *Boletin de Geostadistica* N.° 1 Mayo 1972. Centro de Geostadistica, Universidade de Chile.

[6] — **David, M., Dowd, P., Korobov, S.** (1974). «Forecasting departure from planning in open pit design and grade control» 12th APCOM — Golden, Colorado, USA, 1974.

[7] — **Dowd, P.** and **David, M.** «Planning from Estimates: sensitivity of mine production schedules to estimation methods». NATO A. S. I. Advanced Geostatistics in the mining Industry. (D. Keidel, Dordrecht) Holland 1976.

[8] — **David, M.** «Tools for planning — variances and conditional expectations, 12th APCOM 1974.

[9] — **Matheron, G.** (1973) «The Intrinsic Random Functions and their applications» *Advances in applied probability*, December 1973.

[10] — **Matheron, G.** (1976) «A simple substitute for conditional expectation: the disjunctive kriging». NATO A. S. I. Advanced Geostatistics in the mining industry (D Reidel, Holland).

[11] — **Matheron, G.** (1976) «Forecasting block grade distributions: the transfer functions». NATO A. S. I. Advanced Geostatistics in the mining industry (D. Reidel, Holland).

[12] — **Marechal, A.** (1976) «The practice of transfer functions: numerical methods and their application» NATO A. S. I. Advanced Geostatistics in the mining industry (D. Reidel, Holland).

[13] — **Marechal, A.** (1976) «Selecting mineable blocks: experimental results observed on a simulated orebody». NATO A. S. I. Advanced Geostatistics in the mining industry (D. Reidel, Holland).

[14] — **Matheron, G.** (1962) «Traité de Geostatistique appliquée» Memoires du B. R. G. M. Editions Technip.

[15] — **Huijbregts, C.** and **Alfaro, M.** (1974) «Simulation of a sub-horizontal sedimentary deposit» Centre de Morphologie Mathematique, Fontainebleau, France.

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 338.5:519.28:622

Avaliação económica de projectos mineiros por simulação

HEITOR SIMÕES SANTOS *

SUMÁRIO

Dado o carácter prático deste trabalho, e estando ele integrado no Seminário de Geomatemática, onde outros trabalhos apresentam os conceitos teóricos da simulação, estes aspectos não são incluídos aqui.

Por outro lado, sendo este processo de simulação uma aplicação à Análise Económica de Projectos admite-se que:

- *São conhecidos os conceitos necessários ao Discounted-Cash-Flow.*
- *Um projecto/exemplo está disponível e já foi explicado.*
- *São conhecidos os princípios básicos da Informática.*

Para satisfazer os dois primeiros pontos o leitor deve remeter-se ao anexo, onde de uma maneira sucinta se relembram os conceitos, se introduz o projecto/exemplo, e se analisa o efeito de variações discretas (Análise de Sensibilidade).

Neste trabalho propriamente dito, expõe-se a estrutura do processo de simulação, apresentando o projecto/exemplo na óptica dos conceitos probabilísticos (Análise do Risco).

SUMMARY

As this paper intends to be a practical one as well as a part of the present semminar, where theoretical concepts on simulation were already introduced, the former part was skipped.

On the other hand, being «This Simulation Process» concerned with the Economic Analysis of the Projects three points are assumed:

- *Modern concepts of Econ. An. of Proj. (DCF) are known.*
- *A project/example is available and already explained.*
- *Basic concepts on the computer science are required.*

Excluding the last point, the reader is reverted to the Annex, where a short introduction on DCF is available (as a reminder) as well as the Project/ /Example being introduced in order to clear the structure and the concepts explored on discrete variations (Sensitivity Analysis).

Therefore, the present paper is concerned with the structure of a simulation process, presenting The Project/Example under the probabilistic concepts (Risk Analysis).

ÍNDICE

1 — INTRODUÇÃO
2 — PRINCÍPIOS DE ANÁLISE ECONÓMICA DE INVESTIMENTOS (DCF)
3 — PROCESSO DE SIMULAÇÃO (MONTE CARLO)
4 — CÁLCULO AUTOMÁTICO
5 — ELEMENTOS/BASE DO PROJECTO/ /EXEMPLO
5.1 — As variáveis aleatórias
5.2 — Correlação entre variáveis
6 — PRÁTICA DO PROCESSO DE SIMULAÇÃO
6.1 — Introdução de dados
6.2 — Número de realizações
6.3 — Resultados

1 — INTRODUÇÃO

Integrado neste seminário, o presente trabalho tem objectivos limitados que o confinam à «prática do processo de simulacão» aplicado à análise de investimentos.

Trata-se, portanto, de um trabalho que, requerendo o conhecimento e a capacidade de utilização do *Cálculo Automático*, se apoia fundamentalmente nos conhecimentos de *Análise de Investimentos* e dos *Processos de Simulação*.

Abordaremos assim, sempre sucintamente e com objectivos específicos, os temas propostos, fazendo-os seguir da descrição e elementos/base do exemplo, para depois apresentar os resultados e as conclusões.

* Engenheiro de Minas (I. S. T.), M. Sc. (University of London), Eq. Prof. Aux. (Universidade de Coimbra).

2 — PRINCIPIOS DE ANÁLISE ECONÓMICA DE INVESTIMENTOS (D. C. F.)

Este tema é pressuposto ser do conhecimento dos participantes, mas uma exposição sucinta encontra-se nas primeiras quatro páginas do ANEXO I.

A técnica aqui seguida é portanto a do «Discounted Cash-Flow» produzindo como indicador principal a Taxa de Desconto Interna (TDI = «rate of return») e como indicadores complementares o Máximo Capital Investido (MCI) e Tempo de Recuperação do Capital (TRC).

3 — PROCESSO DE SIMULAÇÃO (MONTE-CARLO)

Perante a «Introdução à Simulação» já apresentada, tendo em atenção os Cap. 1, 2, 3 e muito especialmente o sub-capítulo 3.5, apenas especificaremos que o processo aqui seguido se baseia nas técnicas de Monte-Carlo, sendo portanto um processo de simulação estocástico.

Quanto às distribuições adoptadas para as variáveis aleatórias, são do tipo triangular.

Mas, dado o carácter prático deste trabalho, tornaremos mais evidente a estrutura de um processo de simulação.

Na realidade podemos considerar três fases distintas:

— Geração de números pseudo-aleatórios de acordo com as distribuições definidas para cada variável.
— Modelo matemático que traduz o método de análise em questão, produzindo como resultados os chamados «indicadores».
— Análise estatística dos conjuntos de indicadores calculados.

Este esquema será pormenorizado e evidenciado no Cap.º seguinte.

4 — CÁLCULO AUTOMÁTICO

A necessidade da utilização de computadores aparece como evidente, pelo menos como único meio prático de realização dos processos de simulação.

Por isso, esta pequena nota se justifica, mas ela não tem outro objectivo que não seja a identificação e situação do presente caso.

Os programas foram escritos em BASIC e estão formulados de acordo com as fases do processo de simulação, a que já fiz referência, encadeando-se contudo automaticamente.

A Fig. 1.4 apresenta a estrutura do processo em termos informáticos.

As razões que levaram a particularizar o pequeno esquema do cap.º 3 do modo apresentado não estão no âmbito deste trabalho mas tem consequências de carácter prático das quais ressalta a possibilidade de, em caso de acidente operativo, ou de se pretenderem alterar os elementos/base do modelo, não ser necessário reiniciar todo o processo.

Estas vantagens não serão de desprezar se, mesmo quando se trabalha com computadores, recordarmos que o modelo terá de ser «corrido» um número elevado de vezes — que pode atingir as centenas — de acordo com a precisão desejada.

5 — ELEMENTOS/BASE DO PROJECTO/EXEMPLO

O projecto/exemplo sobre o qual fizemos incidir este estudo encontra-se descrito no ANEXO I, com início na 5.ª página.

Do tratamento, que ainda no ANEXO I, mas nas páginas seguintes à descrição, o projecto/exemplo é submetido, só nos interessa concretamente, aquele que se encontra da 5.ª à 8.ª página e que é chamado de «cash-flow básico».

Convém contudo referir, embora isso se encontre em evidência na 9.ª página, que daí para diante se procedem a estudos de sensibilidade, que, como se sabe, são estudos relativos a variações discretas dos elementos/base do projecto/exemplo, aqui traduzido pelo modelo matemático.

Assinalámos porém este facto pelo que ele representa como conceito diverso do que preside ao processo de simulação (distribuição probabilística).

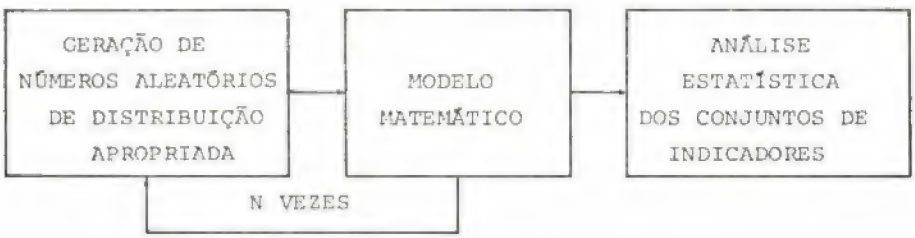


FIG. 1.3 - FASES DE UM PROCESSO DE SIMULAÇÃO

5.1 — As variáveis aleatórias

Das variáveis que enformam o modelo do projecto/exemplo, nem todas se podem classificar de aleatórias, pelo menos se pretendermos encarar o problema em termos práticos.

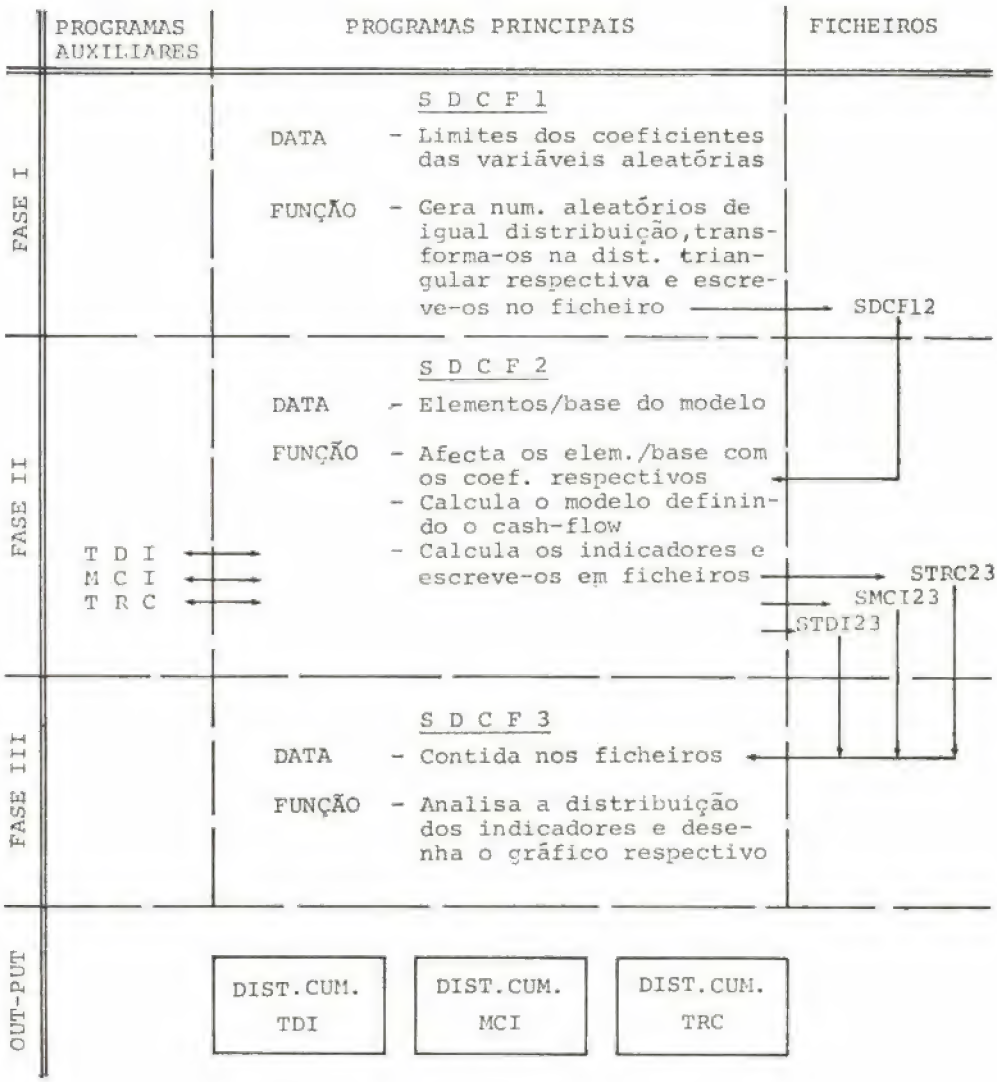


FIG. 1.4 - ESTRUTURA INFORMÁTICA DO PROCESSO DE SIMULAÇÃO

Assim admitimos que apenas cinco dessas variáveis justificavam um tratamento aleatório, ou melhor, para ser mais preciso, cinco conjuntos de variáveis.

Elas são: 1) — Preço de venda dos pebble
2) — Preço de venda dos smalls
3) — Investimento em equipamento
4) — Capital operacional fixo
5) — Investimento em construção civil
6) — Custos operacionais
7) — Capital operacional móvel

onde 4) se encontra directamente ligado a 3), e 7) se encontra directamente ligado a 6), constituindo assim os cinco conjuntos.

Os valores mais prováveis das variáveis são os que deram forma ao modelo base.

O problema que se põe inicialmente é o da definição do rigor com que esses valores foram calculados e consequentemente a atribuição a cada uma dessas variáveis, de coeficientes correctivos determinados aleatoriamente e com distribuições apropriadas (triangulares), cujos limites inferior e superior há que definir.

Assim, teremos para os cinco grupos de variáveis: (Fig. 1.5.1).

Estes coeficientes são os que foram atribuídos no processo de simulação cujos resultados constituem o presente trabalho.

Eles foram escolhidos com base em razões técnicas que se imaginaram para o projecto em determinada fase do seu estudo.

Obviamente, esses coeficientes podem ser alterados quer para experimentação do processo de simulação, quer para, no caso real, corresponder a

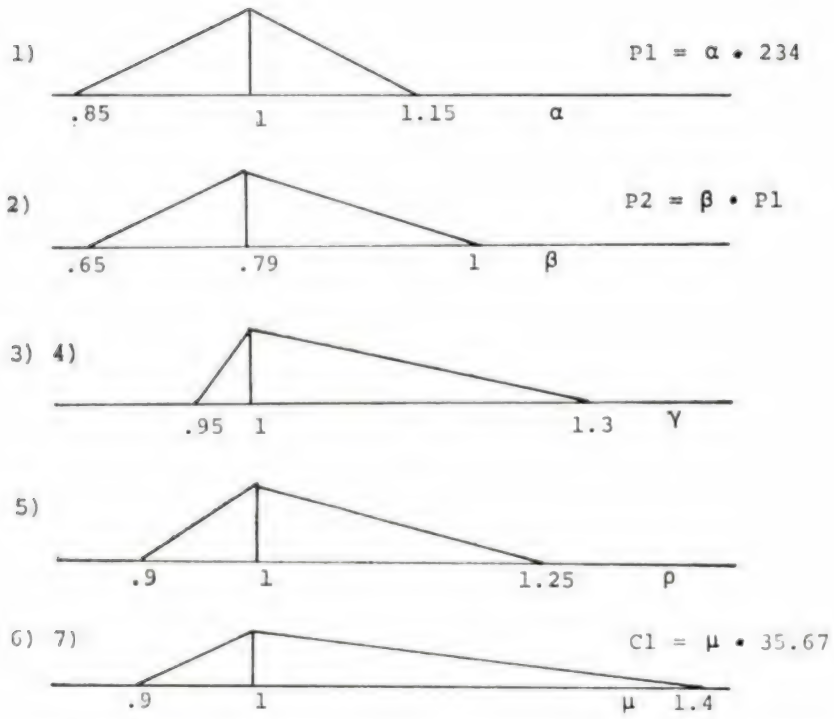


FIG. 1.5.1 - DISTRIBUIÇÕES TRIANGULARES DOS COEFICIENTES

uma situação «de facto» referente ao conhecimento num determinado momento.

Na nossa realização do processo de simulação vamos por certo alterá-los.

Uma nota final sobre este aspecto das variáveis aleatórias do modelo aqui apresentado deve referir que nele não se entra em linha de conta com a aleatoriedade das reservas, o que, de certo modo está em contradição com o que se diz na descrição do projecto (ANEXO I — 5.ª página).

E não será só este aspecto, por certo, que pode ser criticável no modelo apresentado.

De resto, de todo este processo de simulação, o modelo matemático dificilmente traduzirá toda a realidade, e será suficientemente genérico para abarcar todas as hipóteses, a menos que os custos e os tempos de realização não sejam considerados.

Por outro lado, são estes aspectos (custo e tempo) de um modelo suficientemente genérico que levam à construção de um modelo com objectivos muito específicos, e cujo aproveitamento para objectivos diversos ou outro projecto, é geralmente impossível.

5.2 — Correlações entre variáveis

Da observação dos esquemas representativos das distribuições triangulares atribuídas às variáveis, deve ressaltar a 2) à qual o valor mais provável atribuído não é representado pelo coeficiente 1, mas sim .79.

Nota-se ainda que o coeficiente aleatoriamente definido tem o valor máximo de 1 e por outro lado, a correcção que esse coeficiente irá provocar, vai incidir sobre uma variável já afectada de outro coeficiente (a variável 1).

Trata-se na realidade dos valores de venda dos dois tipos de minério que o projecto prevê produzir. E tratando-se de dois tipos do mesmo minério, os valores de venda não são variáveis independentes entre si, mas também, uma não é função da outra.

Isto é, considera-se absurdo que ao simular uma realização do projecto, ocorram para estas duas variáveis situações de valores absolutos incompatíveis com a análise histórica dos valores das mesmas variáveis.

Trata-se portanto de uma estimativa de correlação que é introduzida no modelo.

6 — PRÁTICA DO PROCESSO DE SIMULAÇÃO

6.1 — Introdução de dados

Para que o computador possa realizar a tarefa que através do programa ou programas lhe é indicada, torna-se necessário como todos sabem, fornecer-lhe os dados (data) do problema a resolver.

Mas também é sabido que essa data, tem uma certa ordem, tem um certo significado, e além disso

SDCF1.

```
  .
  .
  .
998 REM   LIMITES,SOB A FORMA DE COEFICIENTES PARA
999 REM   PRECO  PEBBLE
1000 DATA .85,1,1.25
1099 REM   PRECO  SMALLS
1100 DATA .65,.79,1
1199 REM   INVESTIMENTOS EM EQUIPAMENTOS E CAP. OPER. FIXO (SOBRESSAL)
1200 DATA .95,1,1.3
1299 REM   INVESTIMENTOS EM CONSTRUCAO CIVIL
1300 DATA .9,1,1.25
1399 REM   CUSTOS OPERACIONAIS E CAP. OPER. MOVEL
1400 DATA .9,1,1.4
1500 CHAIN SDCF2.
2000 END

READY
```

SDCF2.

```
  .
  .
  .
140 REM VALORES DE BASE
149 REM   PRECO DE VENDA DO PEBBLE  ($/TON.CONC :FOB:)  ***RD***
150 P1=234
159 REM   CUSTO OPER. DIRECTO  ($/TON.CONC)  ***RD***
160 C1=35.67
169 REM   CUSTO DE TRANSPORTE FERROVIARIO  ($/TON.KM)
170 T1=.25
179 REM   DISTANCIA VIA FERREA  ( KM )
180 K1=440
189 REM   CUSTO OPERACIONAL INDIRECTO  ($/TON.CONC)
190 C2=18.5
  .
  .
  .
4999 REM   PRODUCAO DE PEBBLE
5000 DATA 1,2.5,2.5,2.5,2.5,2.5,2.3,2.1,2.1,2.1,1.9,1.5
5099 REM   PRODUCAO DE SMALLS
5100 DATA .68,1.7,1.7,1.7,1.7,1.7,1.9,2.1,2.1,2.1,1.9,1.5
5199 REM   GEOLOGIA E PROSPECAO
5200 DATA 7,10,15,10,6,3,2,2,1,0,0
5299 REM   ESTUDOS COORDENACAO E OPTIMIZACAO
5300 DATA 1,4,10,15,10,10,5,4,1,1,1
5399 REM   EQUIPAMENTO MINEIRO
5400 DATA 9.75,87.75,0
5499 REM   EQUIPAMENTO DE TRANSP. T.Q.
5500 DATA 0,6,54
5599 REM   EQIPAMENTO  GERAL
5600 DATA .8,7.2,0
5699 REM   EQUIPAMENTO DE TRATAMENTO E PARQUE
5700 DATA 17.5,157.5,0
5799 REM   EQUIPAMENTO OFICINAL
5800 DATA 1.75,15.75,0
5899 REM   EQUIPAMENTO DE DISTRIBUICAO DE ENERGIA
5900 DATA 2.2,19.8,0
5999 REM  BARRAGEM E CENTRAL DE BOMBAGEM
6000 DATA 30,7,0
6099 REM   BARRAGEM DE LAMAS
6100 DATA 3,2,0
6199 REM   EDIFICIOS INDUSTRIAIS
6200 DATA 70,20,0
6299 REM   MOVIMENTACAO DE TERRAS E ESTRADAS
6300 DATA 25,5,0
6399 REM   HABITACOES E EDIFICIOS SOCIAIS
6400 DATA 30,15,5
6499 REM   INSTALACAO E TRANSFERENCIA DO TRANSP. DE T.Q.
6500 DATA 0,0,20
6599 REM   FERRO MADEIRA COMBUSTIVEIS LUBRIFICANTES FERROSILICIO FLOCUL.
6600 DATA 8,5,2
6699 REM   CAPITAL OPERACIONAL MOVEL
6700 DATA 35,100,30
10000 END

READY
```

tem, no caso geral, que ser introduzida em certos locais (números de linha) dos programas.

No conjunto de programas (package) que constitui este processo de simulação apenas o primeiro e segundo programas necessitam de data a introduzir pelo interessado. Quanto ao terceiro programa, a sua data não é mais que o «out-put» do segundo programa.

Apresenta-se a seguir a data a fornecer, em ambos os programas e ela é suficientemetne explícita porque está precedida, para cada caso, da instrução REM.

Se houver o cuidado de cotejar os valores da data do segundo programa, veremos que eles são os valores do «cash-flow básico» (Anexo I).

Quanto à data do primeiro programa, julgamos suficientemente explícito o conteúdo de 5.1.

6.2 — Número de realizações

Este aspecto encontra-se sumariamente abordado neste trabalho e é precisamente um dos aspectos a desenvolver no futuro.

QUANTOS RUN ? 50

		α	β	γ	ρ	μ	TDI	MCI	TRC
RUN	1	0.964	0.851	1.028	1.194	1.072	13.09	-800628	9.76
RUN	2	1.098	0.888	1.007	0.975	0.957	31.68	-669343	6.44
RUN	3	1.106	0.838	1.213	1.154	1.329	19.13	-858227	8.28
RUN	4	1.110	0.976	1.119	1.068	1.168	29.00	-749608	6.59
RUN	5	1.144	0.843	1.054	1.095	1.108	28.79	-731549	6.66
RUN	6	0.980	0.737	1.098	0.991	1.158	7.79	-812090	12.69
RUN	7	1.140	0.745	1.076	1.140	1.081	24.08	-762189	7.20
RUN	8	1.010	0.755	1.135	1.082	1.294	8.48	-857523	12.33
RUN	9	0.923	0.757	0.992	0.977	1.216	1.89	-838611	14.84
RUN	10	1.155	0.697	1.031	0.947	0.923	28.39	-675770	6.67
RUN	11	0.964	0.717	1.040	0.944	1.076	5.55	-856450	13.82
RUN	12	0.946	0.966	1.023	1.055	0.980	18.64	-741319	8.40
RUN	13	0.899	0.863	1.129	0.963	1.029	7.57	-802738	12.78
RUN	14	0.987	0.895	1.002	0.945	0.941	21.62	-698625	7.81
RUN	15	1.190	0.802	1.043	1.149	0.977	32.45	-703710	6.29
RUN	16	1.031	0.790	1.174	1.059	1.252	12.76	-845075	9.83
RUN	17	0.981	0.951	0.993	1.001	0.982	22.08	-708612	7.65
RUN	18	1.038	0.981	1.090	0.962	1.137	25.38	-738202	7.08
RUN	19	0.981	0.855	1.109	1.075	1.237	11.48	-829976	10.25
RUN	20	1.115	0.773	1.219	1.059	1.074	22.13	-799739	7.85
RUN	21	1.184	0.880	1.049	1.110	1.254	31.32	-739433	6.47
RUN	22	1.003	0.902	1.132	1.088	1.194	15.90	-817228	8.92
RUN	23	1.061	0.834	0.989	1.077	1.046	23.14	-724247	7.40
RUN	24	0.989	0.904	1.029	1.244	1.057	17.46	-790441	8.56
RUN	25	1.034	0.846	1.033	1.000	1.217	17.52	-765734	8.55
RUN	26	1.070	0.860	1.162	1.047	1.380	16.81	-836592	8.69
RUN	27	0.885	0.840	1.007	1.097	1.220	1.17	-880935	14.77
RUN	28	0.947	0.744	1.139	1.038	1.037	6.48	-823523	13.32
RUN	29	1.157	0.826	1.107	1.045	1.141	28.16	-745022	6.71
RUN	30	0.919	0.969	1.056	0.994	1.165	12.37	-787090	10.08
RUN	31	1.028	0.719	1.035	1.091	1.292	8.51	-822550	11.54
RUN	32	0.996	0.703	1.014	0.938	1.149	8.78	-769177	12.15
RUN	33	1.098	0.739	1.048	1.100	1.350	15.24	-812454	8.97
RUN	34	0.960	0.713	1.074	0.972	1.115	5.35	-811780	13.96
RUN	35	1.117	0.808	1.039	1.081	1.035	26.36	-724916	6.86
RUN	36	1.042	0.936	1.070	1.127	1.373	20.17	-810426	8.11
RUN	37	1.055	0.889	1.067	1.178	0.976	24.73	-752433	7.13
RUN	38	1.067	0.804	1.085	1.183	0.986	21.72	-771617	7.72
RUN	39	1.009	0.845	1.059	1.069	1.331	12.27	-835081	10.04
RUN	40	1.056	0.868	0.977	1.075	1.010	25.29	-708875	7.05
RUN	41	1.003	0.881	1.024	0.910	1.063	9.58	-751348	10.65
RUN	42	1.069	0.811	1.047	1.031	1.296	17.39	-785525	8.56
RUN	43	1.030	0.886	0.996	1.033	1.265	18.44	-763163	8.41
RUN	44	0.979	0.708	1.252	1.097	1.053	6.52	-873857	13.30
RUN	45	1.033	0.909	0.962	1.034	1.086	23.73	-711397	7.33
RUN	46	1.055	0.791	1.280	1.020	1.127	16.09	-842092	8.84
RUN	47	1.137	0.869	0.965	0.934	1.238	26.52	-700164	6.87
RUN	48	1.149	0.837	1.201	1.016	1.266	24.95	-797625	7.12
RUN	49	1.069	0.591	1.033	1.072	1.110	24.19	-734345	7.24
RUN	50	0.941	0.744	1.014	1.012	1.059	6.80	-778894	13.19

GRAFICO DA DISTRIBUICAO CUMULATIVA DE T D I

50 REALIZACOES

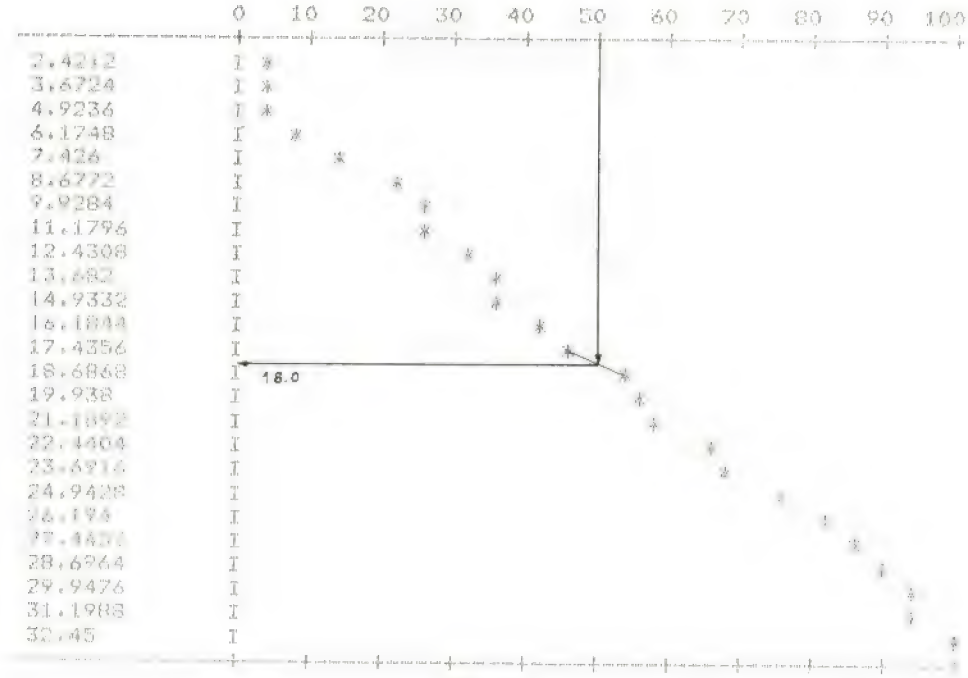


Fig. 1.6

GRAFICO DA DISTRIBUICAO CUMULATIVA DE T D I

300 REALIZACOES

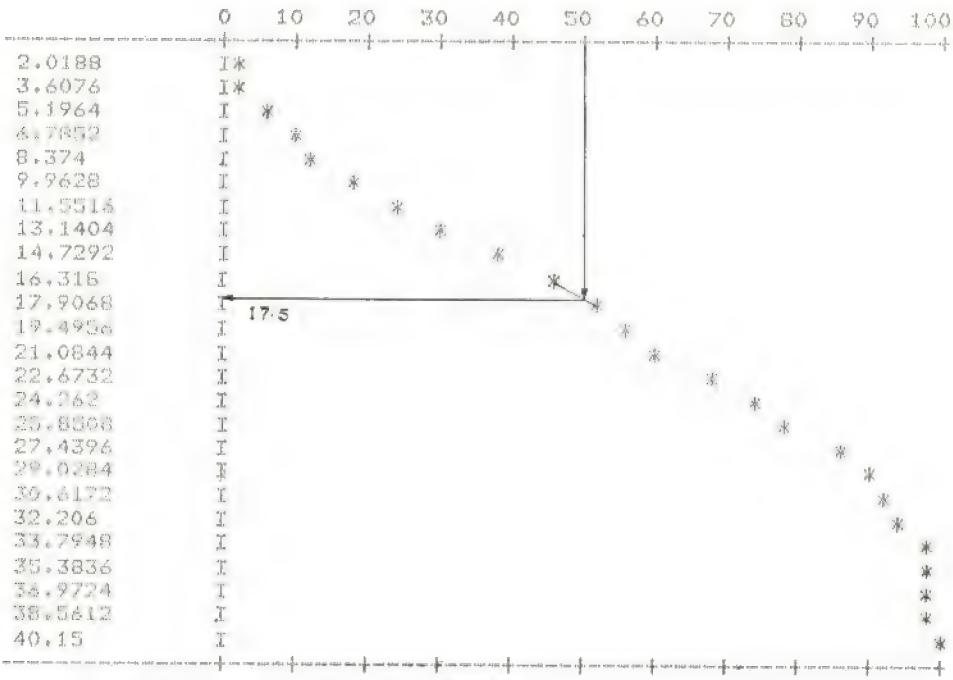


Fig. 2.6

GRAFICO DA DISTRIBUICAO CUMULATIVA DE T D I

400 REALIZACOES

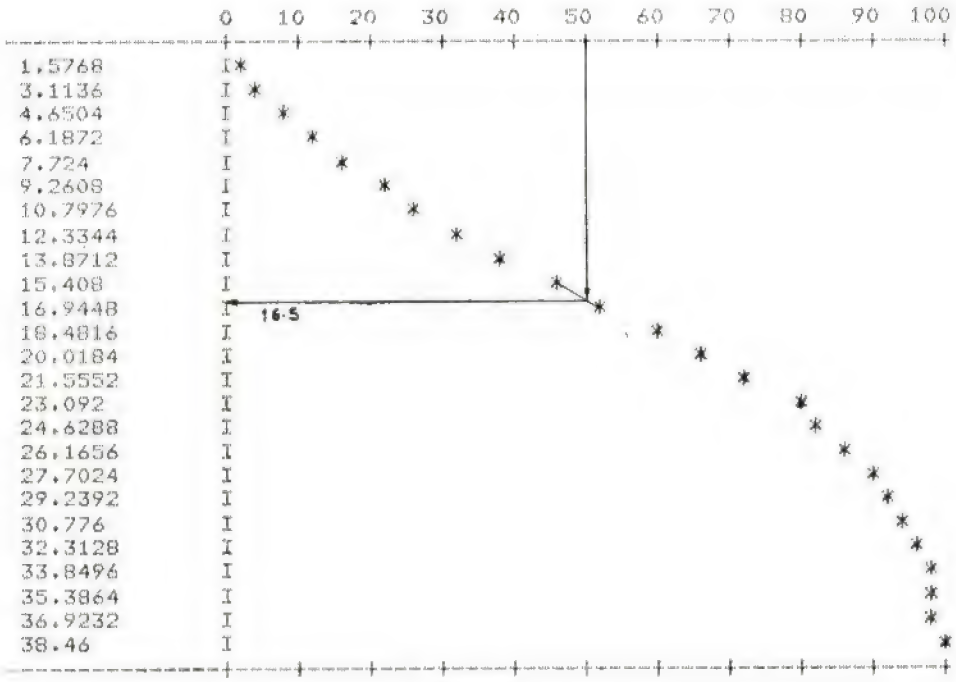


Fig. 3.6

GRAFICO DA DISTRIBUICAO CUMULATIVA DE M C I

300 REALIZACOES

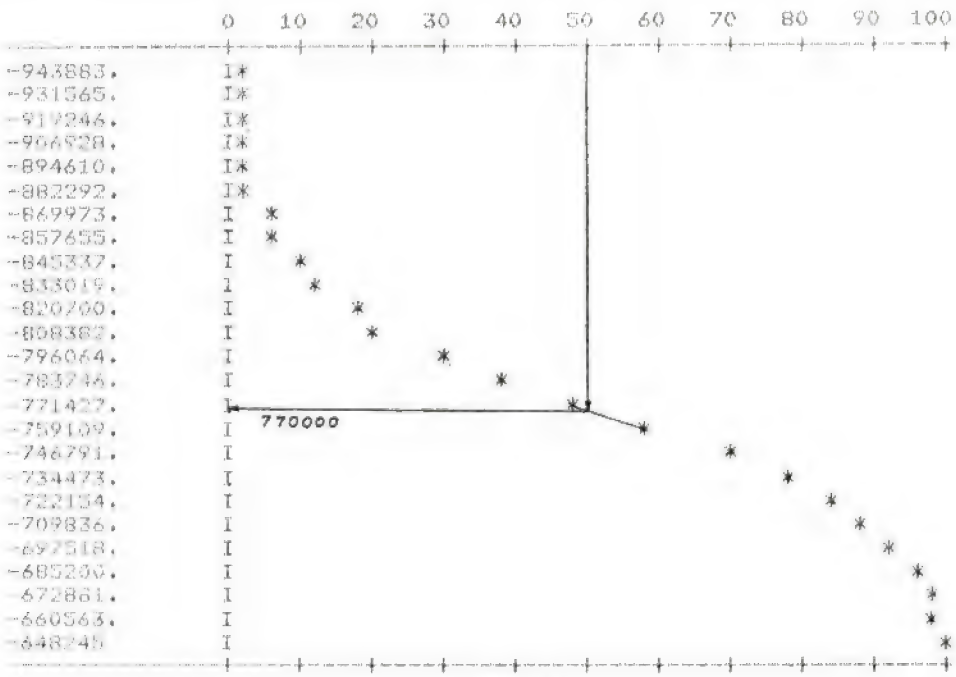


Fig. 4.6

GRAFICO DA DISTRIBUICAO CUMULATIVA DE T R C

300 REALIZACOES

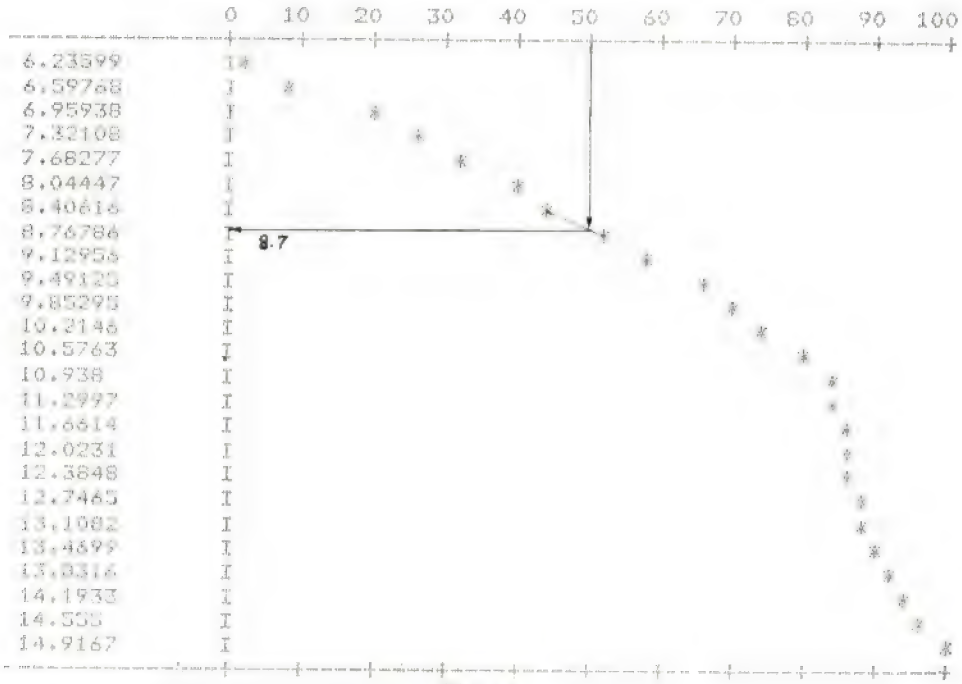


Fig. 5.6

GRAFICO DA DISTRIBUICAO CUMULATIVA DE T D I

300 REALIZACOES

1000 DATA .8,1,1.15

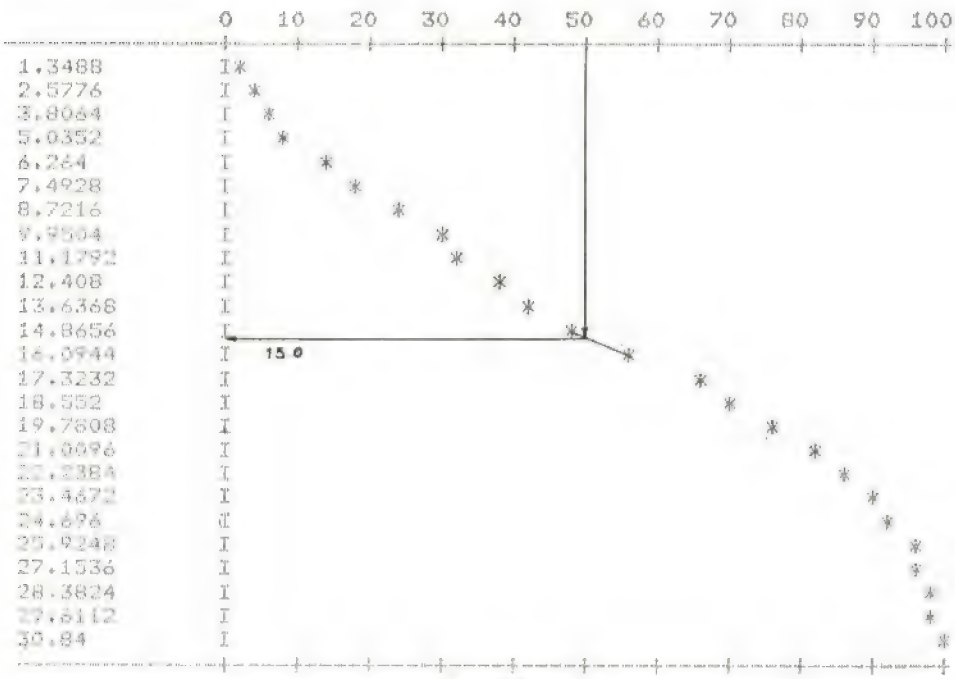


Fig. 6.6

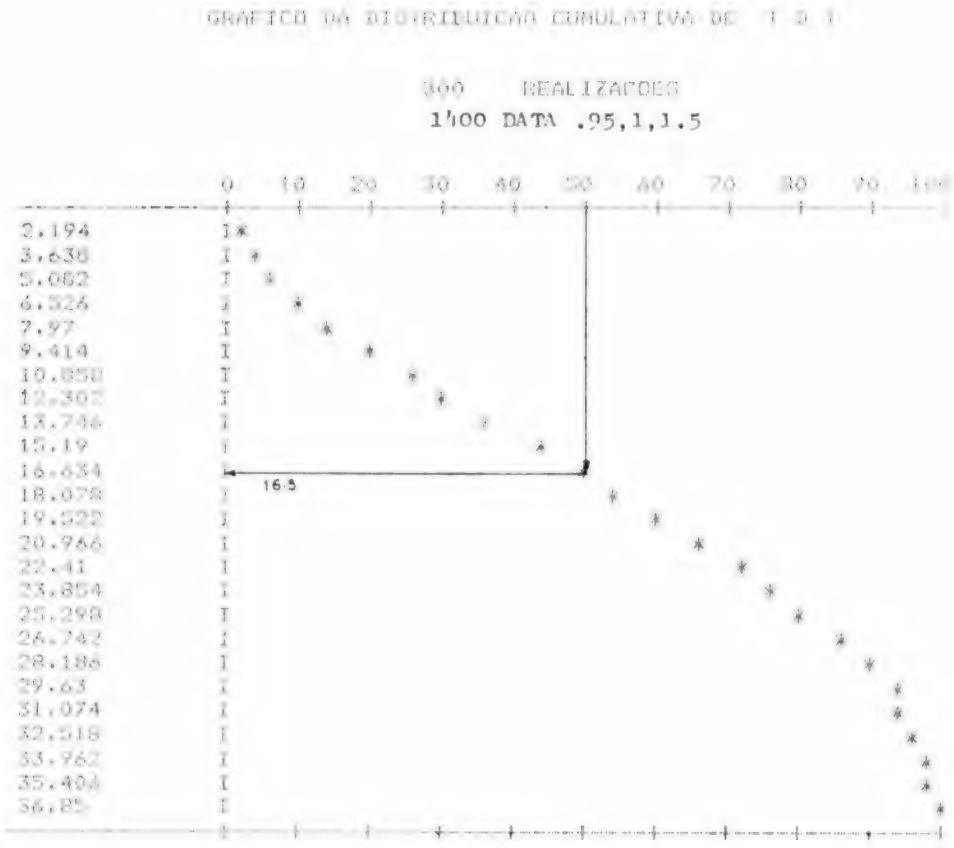


Fig. 7.6

Creio que poderá dizer-se «quantas mais melhor», mas se neste caso o tempo não conta, (por cerca de cada cem «runs» um computador sofisticado pode demorar pouco mais de um minuto de unidade central), o preço já não será factor a desprezar.

O facto é que a experiência deve ser feita para cada caso, embora se saiba de antemão que os limites superior e inferior, nos casos normais, têm valores de 600 e 300 respectivamente.

As nossas experiências situaram-se quase sempre no limite inferior, e infelizmente a sobreposição de gráficos (que não são rigorosos uma vez que não são feitos em máquinas de desenhar) não é muito fácil, dadas as diferentes escalas de representação da variável.

Uma primeira comparação foi feita com a intersecção a 50 % de probabilidade, mas os seus resultados não são conclusivos.

6.3 — Resultados

Tendo adoptado trezentas realizações como valor do número de «runs» apresentam-se os gráficos dos dois outros indicadores escolhidos e calculados pelo modelo.

Finalmente, só para exemplificar, fizeram-se variações nos coeficientes que traduzem a «insegurança do conhecimento» sobre duas variáveis.

O seu resultado (um só indicador — TDI) é expresso nos gráficos seguintes e o efeito dessa variação analisado, mais uma vez e exclusivamente, através da intersecção a 50 % de probabilidade.

BIBLIOGRAFIA

Barish, N. N. — Economic Analysis for Engineering and Managerial Decision-Making — Mc. Graw-Hill — 1962.

Smith, J. — Computer Simulation Models — Griffin — London — 1968.

Reutlinger, S. — Techniques for Projected Analysis Under Uncertainty — Johns Hopkins Press — 1972.

Pouliquem, L. Y. — L'Appreciation du Risque dans L'Evaluation des Projects — Dunnod — 1977.

Squire, L.; TAM, N. C. — Economic Analysis of Projects — Johns Hopkins Press — 1975.

O. C. D. E. — Manual of Industrial Project Analysis in Developing Countries — O. C. D. E. — 1972.

ANEXO I

ANÁLISE ECONÓMICA DE EMPREENDIMENTOS MINEIROS *

(Aplicação das técnicas do «Discounted Cash-Flow»)

1 — INTRODUÇÃO

Os problemas tecnológicos cada vez mais complexos associados à legislação industrial dos nossos dias (por vezes não menos complexos que aqueles) e à tendência, ou melhor, à necessidade de planear ou seleccionar projectos a longo prazo, originaram o desenvolvimento das técnicas para os estudos económicos.

Por isso, e também pela consciencialização de que «lucro» só pode ter significado quando relacionado com o tempo e com o volume dos investimentos, a análise económica enveredou nos últimos anos pelos «métodos de desconto».

Convenientemente elaborados, estes métodos fornecem os elementos de carácter económico necessários às decisões, e posteriormente, em cada momento, constituem um aferidor da economia dos empreendimentos, o que, sem dúvida, é uma eficiente base de administração.

A incerteza dos acontecimentos e portanto o «risco dos investimentos» não é contudo eliminado, mas a lógica dos métodos analíticos de desconto suporta largamente a «tomada de decisão».

Como em quaisquer outros métodos analíticos, a validade dos resultados depende da validade da informação usada, mas até mesmo este aspecto pode ser investigado, isto é, podem ser determinadas as consequências finais (sensibilidades) das informações menos exactas. Resulta daqui, pois, uma definição de graus de sensibilidade ou, por outras palavras, a determinação das variáveis elementares que designaremos por críticas, e, mais ainda, a possibilidade de estabelecer limites para os campos de variação das mesmas.

Dentre os «métodos de desconto» usados em Análise Económica, o «Discounted Cash-Flow» mostra-se eficiente na grande maioria das aplicações, sendo raros os casos em que as suas conclusões sejam menos significativas.

2 — PRINCÍPIOS E TÉCNICAS DO «DISCOUNTED CASH-FLOW»

2.1 — O Conceito de «Valor Actual»

O poder potencial de crescimento do dinheiro ao longo do tempo, quando a ele se associa o conceito de juro, facilmente nos leva a concluir que as consequências das operações monetárias não são independentes do tempo.

O conceito do «valor actual» de determinada quantia, refere essa quantia a uma data específica (na sua forma mais simples refere-se ao momento presente) e não é mais que a transformada daquela quantia num novo referencial de tempo. Note-se porém que o conceito do «valor actual» se baseia exclusivamente na razão atrás apontada, e nada tem que ver com a variação do poder de compra do dinheiro, que normalmente é decrescente.

A razão da transformação é da forma

$$(1+r)^n$$

onde:

n — são unidades de tempo.

r — é o juro (expresso em forma decimal) por unidade de tempo.

Da análise desta função verifica-se que o conceito do «valor actual», como já vimos, intimamente relacionado com o tempo, não pode abstrair-se do conceito de juro, a menos que o tempo seja nulo, o que origina a coincidência do «valor actual» com o valor efectivo.

O «valor actual» (PV) calcula-se a partir do valor efectivo (V) dividindo este pelo factor de juro composto da unidade monetária (para o juro simples por unidade de tempo, e unidades de tempo envolvidas na transformação).

$$PV = V/(1+r)^n$$

Esta noção conduz efectivamente à confirmação de que o «valor actual» é igual ao valor efectivo quando o intervalo de tempo é nulo.

$$PV = V/(1+r)^0 = V$$

A aplicação mais corrente do conceito que sumariamente tentamos expor, é a comparação de verbas cuja realização se processe em épocas diferentes. Tal comparação só se torna efectiva quando todas se encontram no mesmo referencial de tempo.

Nesta aplicação, o juro utilizado para a transformação pode tomar qualquer valor diferente de zero, mas terá que ser o mesmo na transformação de todas as verbas que se pretendam comparar.

Outra aplicação do conceito do «valor actual» é aquela que resulta da particularização deste mesmo valor, permitindo assim achar o juro a aplicar ao valor efectivo da verba para que esta se transforme em dado intervalo de tempo, no «valor actual» previamente fixado.

Resulta assim um novo conceito, como a seguir se expõe.

* I Congresso Hispano-Luso-Americano de Geologia Económica. Madrid-Lisboa, 1971.

2.2 — Taxa de Desconto Interna

O aspecto financeiro de um empreendimento caracteriza-se sempre por movimentos monetários em sentidos opostos, isto é, despesas e receitas.

Quando estes movimentos monetários se agrupam nos intervalos de tempo em que se processaram, a soma algébrica daqueles conduz a um valor final (saldo) próprio de cada intervalo de tempo, e que tanto pode ser positivo (receita) como negativo (despesa).

Quer dizer, em última instância, um empreendimento normal terá nos intervalos de tempo da sua vida, saldos positivos e negativos.

A apreciação do conjunto dos valores efectivos dos saldos só se torna realmente válida se, como vimos atrás, os situarmos no mesmo referencial de tempo, isto é, se calcularmos o «valor actual» de cada um deles.

Chama-se «taxa de desconto interna» aquele juro que, aplicado aos saldos positivos, lhes confere «valores actuais» cuja soma é igual mas de sinal contrário à soma dos «valores actuais» dos saldos negativos quando descontados ao mesmo juro.

Chama-se portanto «taxa de desconto interna» aquele juro que confere à soma algébrica de todos os «valores actuais», um valor nulo.

2.3 — Recuperação do Capital Investido

O tempo necessário para recuperar os investimentos feitos ou a fazer com determinado empreendimento, sem qualquer juro, foi sempre e ainda hoje é um indicador de certo significado.

A análise económica através dos métodos de desconto, mais concretamente o «Discounted Cash-Flow» na sua forma cumulativa não descontada, fornece automaticamente aquele tempo. Porém, o seu significado é diminuto, a menos que o empreendimento seja sujeito a alto grau de «risco».

Este indicador, de facto, é independente dos acontecimentos posteriores à data que ele define, e como tal nada nos diz sobre a restante parte da vida prevista para o empreendimento.

Já bastante mais significativos se tornam os tempos de recuperação dos investimentos quando calculados (actualizados) a uma taxa particular, por exemplo a taxa mínima a que a empresa espera ver recompensado o seu capital próprio.

Este raciocínio leva-nos, aliás, ao conceito já definido da «taxa de desconto», que afinal não é mais que o juro a que se terá que descontar o «cash-flow» para que o tempo de recuperação do capital investido seja igual ao tempo de vida do empreendimento.

2.4 — Estruturação do D. C. F.

As técnicas e os princípios gerais envolvidos no «Discounted Cash-Flow», sumariamente abordados, mostram uma relativa simplicidade.

A estruturação de um DCF requer porém a colaboração de todos os sectores envolvidos no empreendimento e só na medida em que estes se integram nos objectivos, poderão fornecer o melhor do seu conhecimento e da sua sensatez.

Só neste caso o modelo económico traduzido pelo DCF terá alta probabilidade de corresponder à futura realidade, e portanto tornar-se útil, na medida em que previu os acontecimentos e ou constitui um aferidor para eles.

Vejamos pois, sumária mas especificamente, os mais importantes aspectos.

2.4.1 — Administração

Sob o aspecto da estruturação, a Administração precisa definir claramente os objectivos, quer no aspecto qualitativo, quer ainda, se possível, no aspecto quantitativo.

A orientação geral inicialmente definida não deve porém ser considerada imutável, mas constituirá a base dos pareceres prévios dos sectores técnicos, legais, fiscais e financeiros, a submeter posteriormente à mesma Administração.

O exame conjunto dos referidos pareceres poderá alterar ligeira ou profundamente a orientação inicial. Quer dizer, as diversas alternativas que, perante um objectivo, se põem em cada um dos campos necessários para o seu alcance, e que originalmente não eram por certo do conhecimento da Administração, podem alterar a orientação básica definida em primeira instância, e podem até alterar os objectivos finais.

Também as incertezas de cada operação unitária, mesmo nesta fase prévia, devem ser definidas no parecer de cada sector, e à Administração competirá apreciá-las no conjunto.

Nota-se no entanto que deduções mentais ou mais apressadas acerca de situações hipotéticas não podem ser consideradas sem que o estudo económico seja totalmente recalculado. A interacção proveniente de variações básicas é praticamente imprevisível, e o seu estudo é tema de capítulo posterior, fora da «estruturação» que estamos a abordar.

2.4.2 — Técnicas

O grau em que as técnicas se encontram envolvidas na estruturação de um «cash-flow» é variável de empreendimento para empreendimento, mas duma maneira geral é muito importante.

O conhecimento das técnicas é susceptível de aperfeiçoamento e, muitas vezes, esse conhecimento pouco diz sobre o caso específico que se pretende tratar.

O caso concreto de determinadas técnicas aplicadas a determinados produtos é pois um processo moroso que normalmente se processa por estágios.

Na medida em que os estágios de conhecimento aplicado se aprofundam, as margens de erro dimi-

nuem, e por isso mesmo a informação técnica que enformará os estudos económicos deverá, em estágios sucessivos, conter valores cada vez mais aperfeiçoados e com eles serem definidas margens de erro cada vez menores.

Quer dizer, durante um período mais ou menos longo, o estudo económico irá sendo aperfeiçoado, preferivelmente por estágios, fundamentalmente estágios de conhecimento técnico, através do aprofundamento de determinados caminhos, do estudo de alternativas ou ainda da optimização de conjuntos.

Por seu lado, o estudo económico de cada estágio pode ir definindo concretamente os campos que merecem estudo mais acurado, isto é, os campos de maior sensibilidade do empreendimento, como veremos mais adiante.

2.4.3 — Vendas

Compreende-se facilmente, embora por vezes esta realidade fundamental seja esquecida ou menosprezada, que as vendas determinam o interesse e, portanto, a necessidade de um projecto.

O ajuste de qualidade entre o que se sabe e pode produzir e aquilo que se é capaz de vender, é o primeiro tema determinante do interesse do empreendimento.

O segundo tema do sector vendas refere-se ao ajuste entre as quantidades vendáveis e produzíveis, e o terceiro aos preços de venda, mas entre estes dois últimos a interacção pode ser fundamental.

Também as previsões fundamentadas têm carácter muito importante neste campo, mas elas devem ser bem distintas das realidades existentes.

O «risco» total do empreendimento é, em alguns casos, constituído por larga parcela proveniente do campo das vendas.

Os técnicas de «marketing» e as campanhas de publicidade podem constituir elementos importantes na concretização das vendas, mas nem todos os empreendimentos são altamente sensíveis a tais manobras.

A prospecção de mercados desempenha um papel primordial neste campo, e o carácter evolutivo do passado permite em maior ou menor grau prever o futuro.

2.4.4 — Impostos e Finanças

O campo dos impostos é, de um modo geral, altamente significativo, não só pelo valor que os impostos podem tomar, como também, e duma maneira geral, pela possível complexidade do problema. Os aspectos financeiros e legais estão também relacionados com estes, pelo que a análise conjunta se torna necessária.

Constitui no entanto um bom método de trabalho, a análise do empreendimento pelos próprios méritos, isto é, manter a distinção entre o empreendimento em si mesmo e os benefícios que certas manobras legais ou financeiras possam trazer no campo dos impostos.

Um outro aspecto de importância no campo dos impostos é o da depreciação dos bens envolvidos no empreendimento. Sendo a maioria dos impostos calculados na base do lucro anual bruto menos as depreciações e/ou perdas acumuladas, é corrente a situação em que as técnicas mais habituais de depreciação não sejam as mais convenientes para fins fiscais, desde que estes permitam certa maleabilidade.

Põe-se então o problema de ensaiar, dentre as possíveis, qual a técnica de depreciação mais benéfica ao empreendimento.

O recurso ao financiamento a médio e longo prazo é política comum nos empreendimentos industriais. A razão fundamental situa-se nas limitações do capital próprio, donde aliás provém a expressão atrás usada «recurso ao financiamento».

Ora, de facto, a utilização de financiamentos tem efeitos mais vastos que o simples «tornar possível o empreendimento».

Porém, há a considerar a limitação natural dos financiamentos, pela sua relação com o capital próprio, a menos que exista a possibilidade de um «aval».

O efeito dos financiamentos nos resultados do empreendimento, pode prever-se em termos de «sensibilidade», de que falaremos mais adiante.

As situações em que o efeito dos financiamentos é benéfico, nulo ou prejudicial, são facilmente definíveis em termos gerais.

Mas o que efectivamente interessa é a previsão de uma das três situações atrás enunciadas e, mais ainda, do seu grau de sensibilidade.

2.5 — O Valor do Elemento Humano

A potencialidade que advém do conhecimento e do interesse que os elementos humanos podem pôr ao serviço de uma empresa, é um meio de realização do empreendimento não traduzível no campo dos estudos económicos. Contudo, o seu efeito sobre os resultados é extremamente importante.

Por isso, uma verdadeira «equipe» tem que ser associada ao empreendimento, no seu estudo básico, na sua optimização, na sua realização e finalmente na sua exploração.

Só o esforço integrado de todos os elementos da «equipe» — administradores, técnicos, economistas, advogados, etc. — associado ao conhecimento básico dos fins a atingir e também dos meios ou técnicas de análise económica, pode prever os elementos estruturais da mesma análise.

Desse esforço, é altamente provável que resulte um modelo económico cujos desvios da realidade sejam de menor importância e, por isso, os objectivos finais que deram origem à decisão de acção, sejam alcançados.

2.6 — O D. C. F. como Auxiliar de Administração

Como órgão máximo de uma empresa, a Administração deve estar absolutamente segura das técnicas, méritos e deficiências do D. C. F.. Se assim não acontecer, então ou não tira proveito daquilo que o D. C. F. lhe pode proporcionar, ou, aceitando incondicionalmente as suas conclusões, delega nos peritos económicos o poder de decisão, que é prerrogativa própria dessa mesma Administração.

Nesse aspecto a Administração baseia-se fundamentalmente no que a seguir se expõe.

2.6.1 — Sensibilidades do Investimento

O resultado global do D. C. F. não é igualmente dependente de todos os componentes que o enformam.

Deste modo, o estudo da variação global por efeito de variação específica de um componente permite estabelecer o grau de sensibilidade do empreendimento em relação a esse componente.

Esta técnica define portanto graus de sensibilidade para os vários componentes, do que resulta uma ordem para aprofundamento dos conhecimentos e, portanto, a exigência de valores médios mais precisos e «limites de confiança» mais apertados. O mesmo é dizer que os componentes mais sensíveis são os que necessitam de ser mais bem dominados, não só nos estudos, como, posteriormente, na execução.

Os estudos de sensibilidade podem estender-se a todos os campos, isto é, a todos os sectores contribuintes, mas mesmo dentro destes, aspectos específicos podem ter interesse para determinação das causas últimas.

2.6.2 — Consequências dos Atrasos ou Paragens

O aspecto que aqui se pretende focar não é mais que um caso específico da sensibilidade.

Nota-se no entanto que, na generalidade, os empreendimentos são muito sensíveis a estes fenómenos, razão pela qual se justifica o desenvolvimento que também recentemente têm tido as técnicas de PERT e C. P. M..

A aplicação destas técnicas associadas ao D. C. F. conduzem por vezes a decisões perfeitamente justificadas que optimizam o todo de um empreendimento, mas que, analisadas por si, parecem perfeitamente absurdas.

2.7 — Dinâmica do D. C. F.

Já vimos que o D. C. F. não é mais que um modelo económico do empreendimento, e também vimos que esse modelo é, na sua estruturação básica, prévio aos acontecimentos.

Se admitirmos que esse modelo económico foi construído com bases técnicas, económicas, financeiras e legais sólidas, o modelo constituirá um ideal do desenrolar dos acontecimentos.

Evidentemente que o desenrolar ideal dos acontecimentos vai conduzir a resultados que estavam integrados nos objectivos finais da empresa, pois foi essa a razão da decisão de acção.

Assim que os acontecimentos se começam de facto a desenrolar, o modelo económico (cash-flow) deve ser comparado com eles ou corrigido naquela parte que os factos consumaram.

A evolução mais provável de alguns dos acontecimentos reais começa cedo a definir-se e a acção para corrigir os afastamentos do modelo ideal ou manter a identidade com ele, pode e deve iniciar-se logo de seguida.

É este aspecto vivo de comparação, correcção e nova previsão entre modelo e realidade que se pretende expressar pela «dinâmica do D. C. F.».

2.8 — O Uso de Computadores no Cálculo de D. C. F.

O cálculo da «taxa de desconto interna» de um «cash-flow» é operação demorada e fastidiosa, muito especialmente se ele for irregular na totalidade ou em grande parte da vida do projecto.

Manualmente, há que recorrer a tabelas, que em função de uma taxa de desconto estimada e do tempo (unidade de tempo) nos indicam o «valor actual» de uma unidade monetária.

Procurando-se a «taxa de desconto interna» haverá que refazer os cálculos com diferentes taxas de desconto, de modo que o «valor actual» tenha sinal algébrico diferente em duas delas.

A interpolação linear entre as taxas de desconto estimadas e os «valores actuais» respectivos, dá uma primeira aproximação do resultado, mas porque, quanto mais afastados são os valores menor é a precisão da interpolação, torna-se necessário, em muitos casos, entrar num método iterativo.

A programação dos cálculos baseia-se obviamente na fórmula que deu origem às tabelas, e não nestas, isto é, baseia-se no conceito de «valor actual» que se traduz por:

$$PV = \sum_{n} \frac{V_n}{(1+r)^n}$$

A iteração necessária para aproximação da «taxa de desconto interna» processa-se pela introdução de um valor r', correcção necessária da «taxa de desconto inicial», que se traduz por:

$$r' = \frac{(1+r) \sum_{n} V_n (1+r)^{-n}}{\sum_{n} n V_n (1+r)^n}$$

3 — AS CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PROJECTO

3.1 — Generalidades

Admitamos que numa região tropical, a cerca de 400 kms do mar, são conhecidos diversos jazigos superficiais de minério de ferro, dispersos em área relativamente restrita, pouco acidentada e mesmo pouco arborizada, atravessada por rio de caudal razoável.

A zona é praticamente virgem de população, embora a distâncias da ordem dos 30 kms existam estradas, caminhos-de-ferro e até uma povoação de razoáveis dimensões.

Desta descrição, embora extremamente sumária, parece inferir-se que existe um certo número de condições favoráveis à exploração de tais jazigos, mas em contrapartida, considerando que só a exportação é viável, aparece-nos uma longa distância ao mar.

O conhecimento actual das reservas, no tipo de minério hematílico eluvial que, em primeira fase, se pretende explorar, é de 54 e 18 milhões de toneladas, respectivamente Reservas Certas e Prováveis.

A probabilidade de novas ocorrências do mesmo tipo de minério, dentro da área restrita já referida ou na sua periferia próxima, é muito pequena, embora a hipótese de jazigos idênticos mas mais afastados, não seja de desprezar.

O conhecimento actual das possibilidades e custos de exploração e tratamento físico para produção de minérios vendáveis está já definido e pode fixar-se em 65 % de rendimento médio em peso (para concentrados de 62 - 64 % Fe) e 35$67 ± 15 %/ton de concentrado sobre vagão (para mineração e transporte ponderado em relação ao T. Q. e rendimento médio em peso do tratamento).

Admitamos ainda que no campo dos transportes ferroviários já dispomos de proposta da entidade ferroviária assegurando o transporte desde a mina até ao porto de mar, parqueamento e carregamento de navios, à taxa de $25/ton km sendo a distância global de 440 kms.

Por outro lado, uma entidade produtora de energia eléctrica propõe-se fornecer a potência necessária às barras de um posto de transformação, na mina, a custo que não interessa aqui especificar, mas que foi considerado nos custos operacionais directos já indicados.

Ainda por outro lado, existe já um conhecimento relativo à construção civil, movimentação de terras para esta, e equipamentos de mineracão, tratamento, parqueamento, oficinal e geral, que é necessário executar e adquirir. Não se trata, porém, e compreensivamente, de um conhecimento exacto.

A completar este panorama, dispõe-se de uma noção bastante correcta dos custos operacionais indirectos, do capital operacional fixo e móvel, e ainda dos impostos a que a actividade mineira está sujeita.

E finalmente, mas de modo algum menos importante, há o conhecimento do mercado internacional dos minérios de ferro, as suas cotações actuais e passadas, assim como as evoluções da oferta e da procura que as originaram.

Pode dizer-se, portanto, haver conhecimento razoável da situação em que o empreendimento, a realizar-se, se irá integrar, assim como um conhecimento razoável das reservas e dos custos operacionais. Ficam pois, com certa insegurança, os valores dos investimentos.

3.2 — Estruturação do «Cash-Flow» Básico

Tendo em atenção não só a limitação necessária deste trabalho, como também os objectivos do mesmo, a estruturação do «cash-flow» básico (aquele que pretende analisar o projecto pelos próprios méritos) é feita com o mínimo de notas explicativas, embora objectivamente, no Quadro I.

Da sua análise e do anteriormente exposto sobre o conhecimento de reservas, exploração, tratamento físico, mercados, etc., infere-se que não estamos situados no tempo zero, mas sim no decorrer do ano 3, mais concretamente, nos primeiros meses desse ano.

No decorrer dos três anos anteriores foram processados trabalhos e diversos estudos, constituindo etapas de conhecimento sobre o possível investimento, a que corresponderam obviamente, com elevado grau de risco, certas despesas.

Estamos pois admitindo que se torna necessária a análise (em termos económicos) do passado, a previsão do futuro, e a tomada de nova decisão:

— abandonar, em pura perda, o trabalho feito;
— aprofundar os conhecimentos (em que campos?);
— iniciar a execução do projecto.

É uma contribuição válida para a tomada de qualquer destas decisões, que vamos procurar extrair destes estudos, através dos indicadores seguintes:

— Máximo capital investido — (MCI — 10^3 $)
— Tempo de recuperação do capital, sem juros — (TRC — anos)
— Taxa de desconto interna (saldos brutos) — (TDIB — %)
— Taxa de desconto interna (saldos líquidos) — (TDIL — %)

Para o modelo económico básico os valores encontrados são os seguintes:

MCI	— 732.606
TRC	— 8,77
TDIB	— 17,82
TDIL	— 16,34

Anexos: Quadro I, Gráfico I, Folha Cálculo I

QUADRO I - CASH-FLOW - MODELO BASICO

ANOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	TOTAL
1.1					1,00	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,30	2,10	2,10	2,10	1,90	1,50	25,50
1.2					0,68	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70	1,90	2,10	2,10	2,10	1,90	1,50	20,78
1	-	-	-	-	1,68	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	4,20	3,80	3,00	46,28
2.1					234 000	585 000	585 000	585 000	585 000	585 000	538 200	491 400	491 400	491 400	444 600	351 000	5 967 000
2.2					125 800	314 500	314 500	314 500	314 500	314 500	351 500	388 500	388 500	388 500	351 500	277 500	3 844 300
2	-	-	-	-	359 800	899 500	899 500	899 500	899 500	899 500	889 700	879 900	879 900	879 900	796 100	628 500	9 811 300
3.1.1	7 000	10 000	15 000	10 000	6 000	3 000	2 000	2 000	1 000								56 000
3.1.2	1 000	4 000	10 000	15 000	10 000	10 000	5 000	4 000	1 000	1 000	1 000						62 000
3.1	8 000	14 000	25 000	25 000	16 000	13 000	7 000	6 000	2 000	1 000	1 000						118 000
3.2.1				9 750	87 750			(4 875)	87 750			(4 875)	87 750			(14 625)	248 625
3.2.2					6 000	54 000										(12 000)	48 000
3.2.3				800	7 200						7 200					(800)	14 400
3.2.4				17 500	157 500											(35 000)	140 000
3.2.5				1 750	15 750											(3 500)	14 000
3.2.6				2 200	19 800											(4 400)	17 600
3.2				32 000	294 000	54 000		(4 875)	87 750		7 200	(4 875)	87 750			(70 325)	482 625
3.3.1				30 000	7 000											(14 800)	22 200
3.3.2				3 000	2 000												5 000
3.3.3				70 000	20 000											(36 000)	54 000
3.3.4				25 000	5 000											(12 000)	18 000
3.3.5				30 000	15 000	5 000										(20 000)	30 000
3.3.6						20 000			15 000			7 500	7 500			(5 000)	45 000
3.3				158 000	49 000	25 000			15 000			7 500	7 500			(87 800)	174 200
3.4.1				3 200	29 400	5 400									(10 000)	(28 000)	-
3.4.2				8 000	5 000	2 000								(2 000)	(3 000)	(10 000)	-
3.4				11 200	34 400	7 400								(2 000)	(13 000)	(38 000)	-
3.5			15 000	35 000	100 000	30 000									(30 000)	(150 000)	-
3	8 000	14 000	40 000	261 200	493 400	129 400	7 000	1 125	104 750	1 000	8 200	2 625	95 250	(2 000)	(43 000)	(346 125)	774 825
4.1					59 926	149 814	149 814	149 814	149 814	149 814	149 814	149 814	149 814	149 814	135 546	107 010	1 650 808
4.2					184 800	462 000	462 000	462 000	462 000	462 000	462 000	462 000	462 000	462 000	418 000	330 000	5 090 800
4.3					31 080	77 700	77 700	77 700	77 700	77 700	77 700	77 700	77 700	77 700	70 300	55 500	856 180
4	-	-	-	-	275 806	689 514	689 514	689 514	689 514	689 514	689 514	689 514	689 514	689 514	623 846	492 510	7 597 788
5	(8 000)	(14 000)	(40 000)	(261 200)	(409 406)	80 586	202 986	208 861	105 236	208 986	191 086	187 761	95 136	192 386	215 254	482 115	1 438 687
6	(8 000)	(22 000)	(62 000)	(323 200)	(732 606)	(652 020)	(449 034)	(240 173)	(134 937)	74 049	266 035	453 796	548 932	741 318	956 572	1 438 687	-
7.1						40 293	101 493	104 430	52 618	104 493	95 993	93 880	47 568	96 193	37 864	-	774 825
7.2						40 293	101 493	104 431	52 618	104 493	95 993	93 881	47 568	96 193	177 390	482 115	1 396 468
7.3						3,00	7,50	7,77	3,90	7,77	7,10	6,95	3,56	7,10	13,20	35,80	
7	-	-	-	-	-	1 209	7 612	8 114	2 052	8 119	6 815	6 525	1 693	6 830	23 415	172 597	244 981
8	(8 000)	(14 000)	(40 000)	(261 200)	(409 406)	79 377	195 374	200 747	103 184	200 867	185 171	181 236	93 443	185 556	191 839	309 518	1 193 706
9	(8 000)	(22 000)	(62 000)	(323 200)	(732 606)	(653 229)	(457 855)	(257 108)	(153 924)	46 943	232 114	413 350	506 793	692 349	884 188	1 193 706	-

QUADRO I — LEGENDA

1.1 — Produção de minério de alto teor «pebble».

1.2 — Produção de minério de alto teor «smalls».

1 — Produção total (10^6 ton).

2.1 — Valor do minério (pebble — 64 % Fe) 234$00/ton.

2.2 — Valor do minério (smalls — 62 % Fe) 185$00/ton.

2 — Valor total do minério F. O. B. (10^3 $).

3.1.1 — Geologia e prospecção.

3.1.2 — Estudos, coordenação e optimização.

3.1 — Total de 3.1.1 e 3.1.2 (10^3 $).

3.2.1 — Equipamento mineiro — 97 500/(3x)/v. residual = 15 % a 4 anos.

3.2.2 — Equipamento de transporte T. Q. — 60 000/ /v. residual = 20 % a 12 anos.

3.2.3 — Equipamento geral — 8 000/(2x)/v. residual = 10 % a 6 anos.

3.2.4 — Equipamento de tratamento e parque — 175 000/v. residual = 20 % a 12 anos.

3.2.5 — Equipamento oficinal — 17 500/v. residual = 20 % a 12 anos.

3.2.6 — Equipamento de distribuição de energia — 22 000/v. residual = 20 % a 12 anos.

3.2 — Total do equipamento montado no local (3.2.1 a 3.2.6 — 10^3 $).

3.3.1 — Barragem e central de bombagem — 37 000/v. residual = 40 % a 12 anos

3.3.2 — Barragem de lamas — 5000/v. residual nulo.

3.3.3 — Edifícios industriais — 90 000/v. residual = 40 % a 12 anos.

3.3.4 — Movimentação de terras e estradas — 30 000/ /v. residual = 40 % a 12 anos.

3.3.5 — Habitações e difícios sociais — 50 000/v. residual = 40 % a 12 anos.

3.3.6 — Inst. e transferência do transp. T. Q. — 20 000/(3x)/v. residual — 25 %.

3.3 — Total de obras (3.3.1 a 3.3.6 — 10^3 $).

3.4.1 — Sobressalentes e peças de desgaste — 33 000/(10 % do v. do equip. inicial).

3.4.2 — Ferro, madeira, combustível, lubrif., ferro-silício, floculante — 15 000.

3.4 — Total de capital operacional fixo (3.4.1 a 3.4.2 — 10^3 $).

3.5 — Capital operacional móvel — 180 000 (10^3 $).

3 — Investimentos totais.

4.1 — Custo operacional de mineração e tratamento, ponderado em relação ao transporte de T. Q. e ao rendimento em peso dos tratamentos (35$67/ton de concentrado colocado sobre vagão).

4.2 — Transporte ferroviário e carreg. de navios ($25/ton km — 440 km).

4 — Custo total do minério F. O. B. (10^3 $).

5 — Saldos brutos (10^3 $) — (2 - 3 - 4).

6 — Saldos brutos acumulados.

7.1 — Amortização máxima (50 % dos saldos brutos).

7.2 — Saldos brutos menos amortizações.

7.3 — Imposto (%) = 100 x (saldos brutos — amort.)/1,8 × cap. social (capital social = 750 000 × 10^3 $).

7 — Valor dos impostos.

8 — Saldos líquidos (10^3 $).

9 — Saldos líquidos acumulados.

( ) — Os valores entre parêntesis representam, dentro da rubrica em que se encontram, valores negativos.

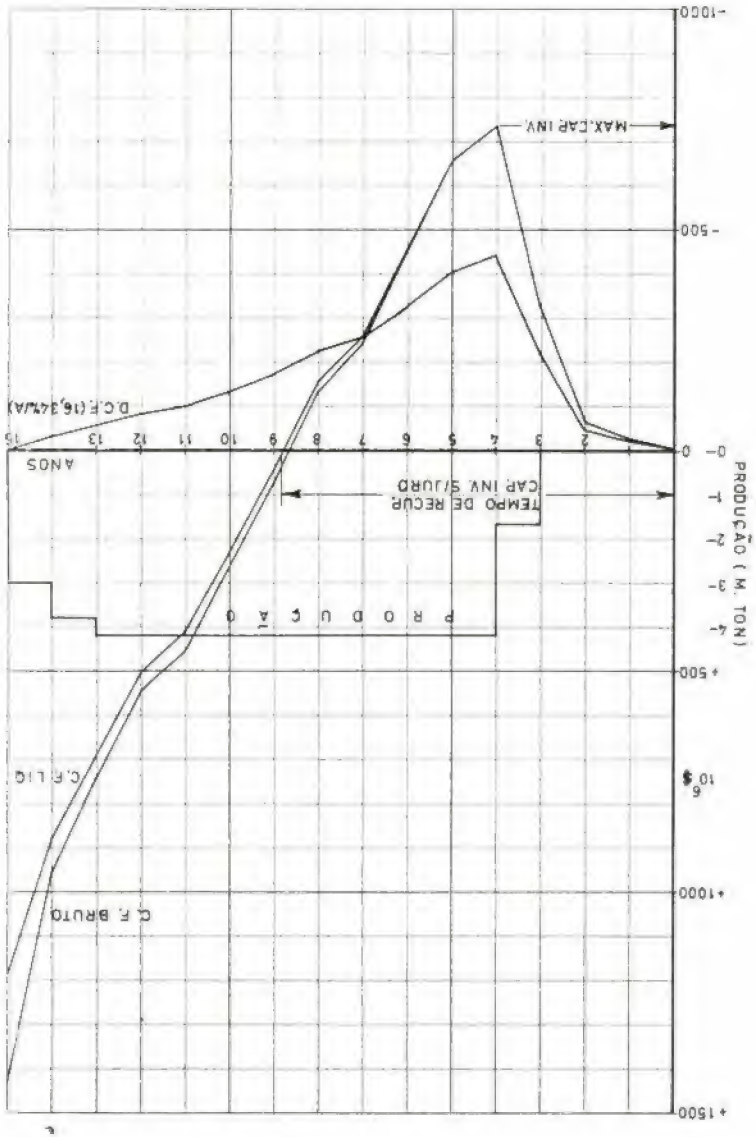


GRAFICO I — CASH-FLOW
MODELO BASICO

```
SERVICO TIME-SHARING  PORTUGAL

ON AT 11:47   LISBOA 03/07/71   TTY  3

USER NUMBER--L00300
PROJECT ID---SHARE
SYSTEM--BASIC
NEW OR OLD--OLD DISCTS***


READY.

10 DATA -8000,-14000,-40000,-261200,-409406,79377,195374,200747
11 DATA 103184,200867,185171,181236,93443,185556,191839,309518
30 DATA 0,6
RUN


DISCTS    11:52   LISBOA 03/07/71

CASH FLOW, NOT DISCOUNTED:
```

PERIOD	CASH FLOW AT END OF PERIOD	CASH FLOW DURING PERIOD	CUML. CASH FLOW END OF PERIOD
0	-8000	0	-8000
1	-14000	0	-22000
2	-40000	0	-62000
3	-261200	0	-323200
4	-409406	0	-732606
5	79377	0	-653229
6	195374	0	-457855
7	200747	0	-257108
8	103184	0	-153924
9	200867	0	46943
10	185171	0	232114
11	181236	0	413350
12	93443	0	506793
13	185556	0	692349
14	191839	0	884188
15	309518	0	1193706

ZERO-INTEREST BREAKEVEN POINT: 8.77 PERIODS

DISCOUNTED RATE OF RETURN: I = 16.34 PERCENT

PRESENT WORTH OF CASH FLOWS AT I = 16.34 PERCENT:

PERIOD	P.W. OF C.F. END OF PERIOD	P.W. OF C.F. DURING PERIOD	CUML. P.W. OF CASH FLOW
0	-8000	0	-8000
1	-12033	0	-20033
2	-29551	0	-49584
3	-165859	0	-215443
4	-223447	0	-438889
5	37237	0	-401653
6	78776	0	-322876
7	69572	0	-253304
8	30736	0	-222568
9	51428	0	-171140
10	40749	0	-130390
11	34281	0	-96110
12	15192	0	-80918
13	25929	0	-54989
14	23041	0	-31948
15	31953	0	5

4 — ESTUDOS DE SENSIBILIDADE

Pelas razões já apontadas, apenas são aqui apresentadas algumas hipóteses de variação dos factores elementares, e os estudos de sensibilidade, só num caso, consideram a variação simultânea de diversos factores.

Estes estudos deverão, porém, num caso real, incluir todas as hipóteses lógicas e prováveis.

É pois comum a necessidade de análise de algumas dezenas de hipóteses.

4.1 — Sensibilidade à Existência de Reservas Prováveis

Se admitirmos que das reservas prováveis dos jazigos apenas existe uma quantidade da ordem da quarta ou mesmo da quinta parte em que elas foram avaliadas, a vida do projecto reduz-se de dois anos. Como contrapartida, só se prevê que não haja necessidade de substituição da segunda frota de equipamento de exploração e transporte a pequena distância.

Isto é, a produção total de minério vendável reduz-se de 46,28 milhões de tons (9 811 300 000$00) para 37,88 milhões (8 051 500 000$00) e o investimento total apenas sofre uma redução de 82 875 000$.

O cálculo dos indicadores já citados fornece os valores seguintes:

MCI	— 732.606
TRC	— 8,77
TDIB	— 17,13
TDIL	— 15,27

Anexos: Gráfico II, Folha Cálculo II.

4.2 — Sensibilidade a Investimentos Superiores

Um dos aspectos citados anteriormente referia-se ao conhecimento pouco seguro do valor dos investimentos.

Se admitirmos que os valores considerados no modelo básico para obras, equipamentos e sobressalentes, são ultrapassados em 15 %, o valor global dos investimentos ascenderá a 873 348 000$00 contra 774 825 000$00 admitidos anteriormente.

O cálculo dos mesmos indicadores fornece os valores seguintes:

MCI	— 817.446
TRC	— 9,33
TDIB	— 15,33
TDIL	— 14,17

Anexos: Gráficos III, Folha Cálculo III.

4.3 — Sensibilidade ao Financiamento

Se admitirmos que o empreendimento tem possibilidades de ser financiado em 85 % dos investimentos originais em equipamento e sobressalentes, ao juro de 8 % ao ano, amortizável em cinco anos (10, 15, 20, 20, 20 %) obteremos um financiamento no valor de 55 300 000$00, que vence um juro total de 93 632 000$00.

Se além deste financiamento se conseguir um outro para 90 % do valor das obras originais, ao juro de 7 % ao ano, também amortizável em cinco anos (10, 20, 20, 20, 20 %), teremos um financiamento no valor de 208 800 000$00, que vence na totalidade, o juro de 50 813 000$00.

Em conjunto, os financiamentos ascendem portanto a 564 100 000$00, vencendo juros no valor de 144 445 000$00.

Acontece porém que o capital próprio investido até à data do hipotético financiamento apenas atinge 181 000 000$00, donde se deduz ser necessário um «aval».

Calculando os indicadores já habituais, temos:

MCI	— 276.262
TCR	— 9,38
TDIB	— 23,30
TDIL	— 21,37

Anexos: Gráfico IV, Folha Cálculo IV.

4.4 — Sensibilidade ao Avanço da Produção

Um outro aspecto a considerar, no caso de a tomada de decisão ser «iniciar a execução do projecto», refere-se ao prazo que se interporá entre essa decisão e o início da produção, isto é, diz respeito à aceleração imprimida à elaboração do projecto definitivo e respectiva execução.

É a sensibilidade do projecto a um hipotético avanço na produção, que vamos apresentar, mas neste caso acrescentaremos a determinação do «valor actual» que tal avanço representa, uma vez que em valor absoluto o seu significado é praticamente nulo (visto que a produção está limitada às reservas, e se for iniciada mais cedo, acabará mais cedo).

Através do valor actual do presente «cash-flow» descontado à «taxa interna de desconto» encontrada no modelo básico, podemos calcular prémios a atribuir aos empreiteiros (obviamente menores que o referido valor actual), ou, se for caso disso, comparar propostas de custos diferentes mas prazos de execução também diferentes.

No caso presente, constatamos que o máximo capital investido é menor que o do modelo básico em 63 462 000$00, que o tempo de recuperação do capital investido é também menor e, finalmente, que o valor actual do avanço da produção (cerca de 4 meses) atinge o valor de 31 647 000$00.

Os indicadores que temos vindo a tomar como referência, têm agora os seguintes valores:

MCI	— 669.144
TRC	— 8,45
TDIB	— 19,22
TDIL	— 17,90
PV	— 31.647

Anexos: Gráfico V, Folha Cálculo V.

```
10 DATA -8000,-14000,-40000,-119000,-95262,50074,61277,52101,-43830
11 DATA 96739,158590,171426,90931,175264,193836,343229
30 DATA 0,6
RUN
```

```
DISCT$     10:01    LISBØA 06/07/71

CASH FLØW, NØT DISCØUNTED:
```

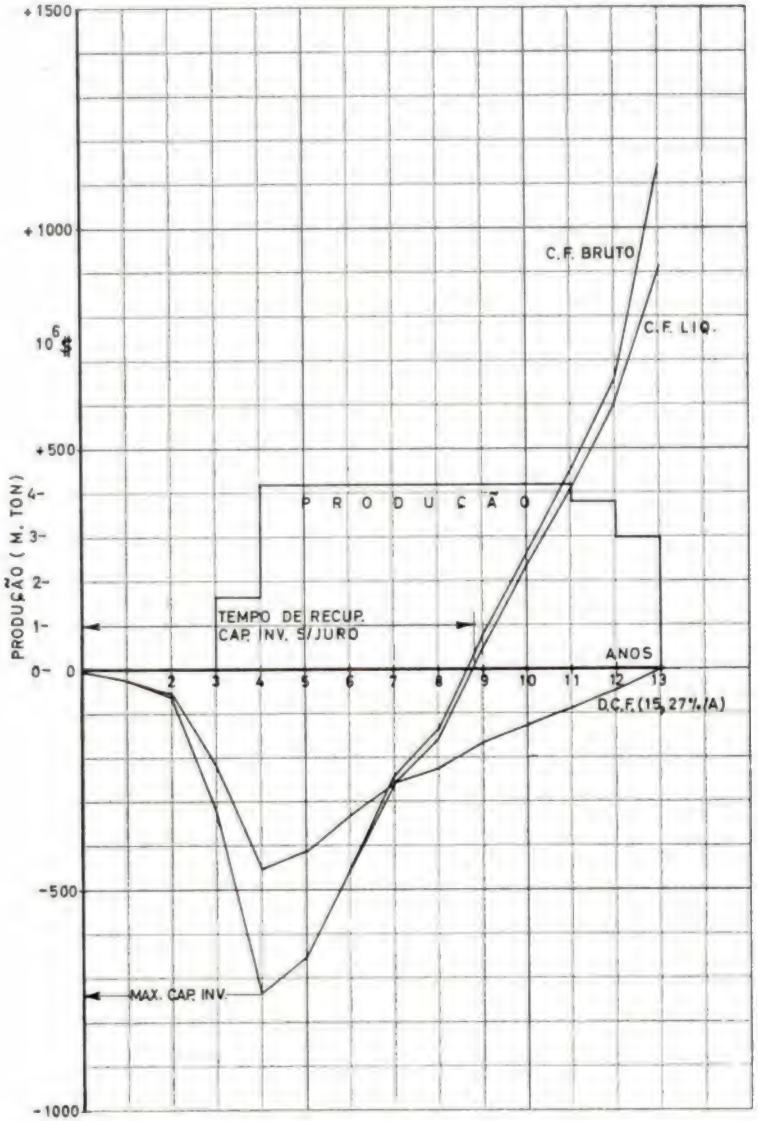
PERIØD	CASH FLØW AT END ØF PERIØD	CASH FLØW DURING PERIØD	CUML. CASH FLØW END ØF PERIØD
0	-8000	0	-8000
1	-14000	0	-22000
2	-40000	0	-62000
3	-119000	0	-181000
4	-95262	0	-276262
5	50074	0	-226188
6	61277	0	-164911
7	52101	0	-112810
8	-43830	0	-156640
9	96739	0	-59901
10	158590	0	98689
11	171426	0	270115
12	90931	0	361046
13	175264	0	536310
14	193836	0	730146
15	343229	0	1073375

```
ZERØ-INTEREST BREAKEVEN PØINT: 9.38 PERIØDS

DISCØUNTED RATE ØF RETURN: I = 21.37   PERCENT

NEG. CASH FLØW IN PERIØD 8 AND PRIØR PØS. CASH FLØW.
MAY BE MØRE THAN ØNE RATE AT WHICH CUML. P.W. = 0. DISCT$
SEEKS ØNE RATE BETWEEN -99.9 AND 500 PERCENT.

PRESENT WØRTH ØF CASH FLØWS AT I = 21.37   PERCENT:
```

PERIØD	P.W. ØF C.F. END ØF PERIØD	P.W. ØF C.F. DURING PERIØD	CUML. P.W. ØF CASH FLØW
0	-8000	0	-8000
1	-11535	0	-19535
2	-27154	0	-46689
3	-66558	0	-113247
4	-43899	0	-157146
5	19012	0	-138134
6	19169	0	-118964
7	13429	0	-105536
8	-9308	0	-114843
9	16926	0	-97917
10	22862	0	-75055
11	20361	0	-54693
12	8899	0	-45795
13	14132	0	-31663
14	12877	0	-18786
15	18787	0	1

GRAFICO II — CASH-FLOW

MODELO DE SENSIBILIDADE-RESERVAS PROVAVEIS



```
10 DATA -8000,-14000,-40000,-290180,-465266,67172,196216,202424
11 DATA 88504,201839,184959,181634,79774,186326,209059,371432
30 DATA 0,6
RUN
```

DISCTS 12:09 LISBØA 03/07/71

CASH FLØW, NØT DISCØUNTED:

PERIØD	CASH FLØW AT END ØF PERIØD	CASH FLØW DURING PERIØD	CUML. CASH FLØW END ØF PERIØD
0	-8000	0	-8000
1	-14000	0	-22000
2	-40000	0	-62000
3	-290180	0	-352180
4	-465266	0	-817446
5	67172	0	-750274
6	196216	0	-554058
7	202424	0	-351634
8	88504	0	-263130
9	201839	0	-61291
10	184959	0	123668
11	181634	0	305302
12	79774	0	385076
13	186326	0	571402
14	209059	0	780461
15	371432	0	1151893

ZERØ-INTEREST BREAKEVEN PØINT: 9.33 PERIØDS

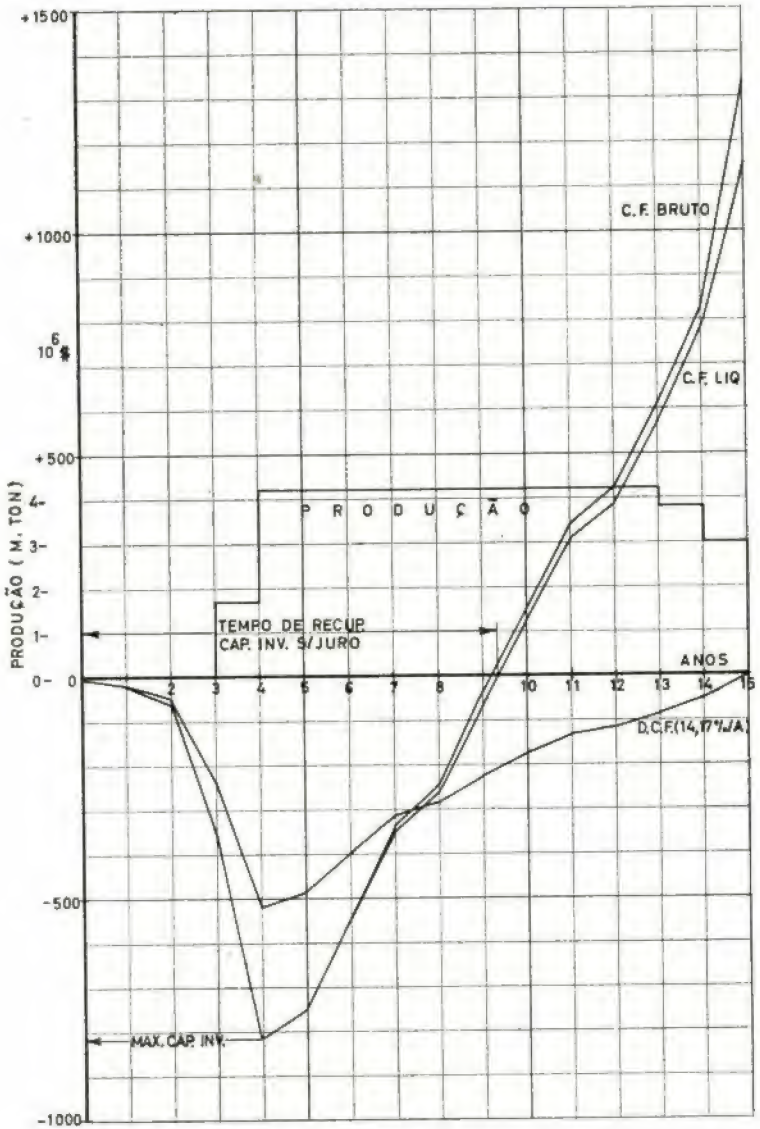
DISCØUNTED RATE ØF RETURN: I = 14.17 PERCENT

PRESENT WØRTH ØF CASH FLØWS AT I = 14.17 PERCENT:

PERIØD	P.W. ØF C.F. END ØF PERIØD	P.W. ØF C.F. DURING PERIØD	CUML. P.W. ØF CASH FLØW
0	-8000	0	-8000
1	-12263	0	-20263
2	-30688	0	-50950
3	-194997	0	-245948
4	-273852	0	-519800
5	34630	0	-485170
6	88605	0	-396565
7	80064	0	-316501
8	30661	0	-285839
9	61248	0	-224592
10	49160	0	-175432
11	42285	0	-133147
12	16267	0	-116880
13	33279	0	-83601
14	32705	0	-50895
15	50896	0	1

GRAFICO III — CASH-FLOW

MODELO DE SENSIBILIDADE-INVESTIMENTOS SUPERIORES



```
10 DATA -8000,-14000,-40000,-290160,-474255,45113,175169,181413
11 DATA 66604,180825,163802,157031,182067,432039
30 DATA 0,6
RUN
```

```
DISCT$      9:55    LISBOA 06/07/71

CASH FLØW, NØT DISCØUNTED:

                CASH FLØW AT    CASH FLØW       CUML. CASH FLØW
PERIØD          END ØF PERIØD   DURING PERIØD   END ØF PERIØD
 0              -8000           0               -8000
 1              -14000          0               -22000
 2              -40000          0               -62000
 3              -290160         0               -352160
 4              -474255         0               -826435
 5               45113          0               -781322
 6               175169         0               -606133
 7               181413         0               -424720
 8               66604          0               -358116
 9               180825         0               -177291
 10              163802         0               -13489
 11              157031         0                143542
 12              182067         0                325609
 13              432039         0                757648

ZERØ-INTEREST BREAKEVEN PØINT: 10.09    PERIØDS

DISCØUNTED RATE ØF RETURN: I = 11.02    PERCENT

PRESENT WØRTH ØF CASH FLØWS AT I = 11.02    PERCENT:

                P.W. ØF C.F.    P.W. ØF C.F.    CUML. P.W.
PERIØD          END ØF PERIØD   DURING PERIØD   ØF CASH FLØW
 0              -8000           0               -8000
 1              -12611          0               -20611
 2              -32454          0               -53065
 3              -212074         0               -265139
 4              -312203         0               -577342
 5               26751          0               -550591
 6               93572          0               -457020
 7               87280          0               -369740
 8               28864          0               -340876
 9               70586          0               -270290
 10              57595          0               -212696
 11              49734          0               -162961
 12              51941          0               -111020
 13              111021         0                1
```

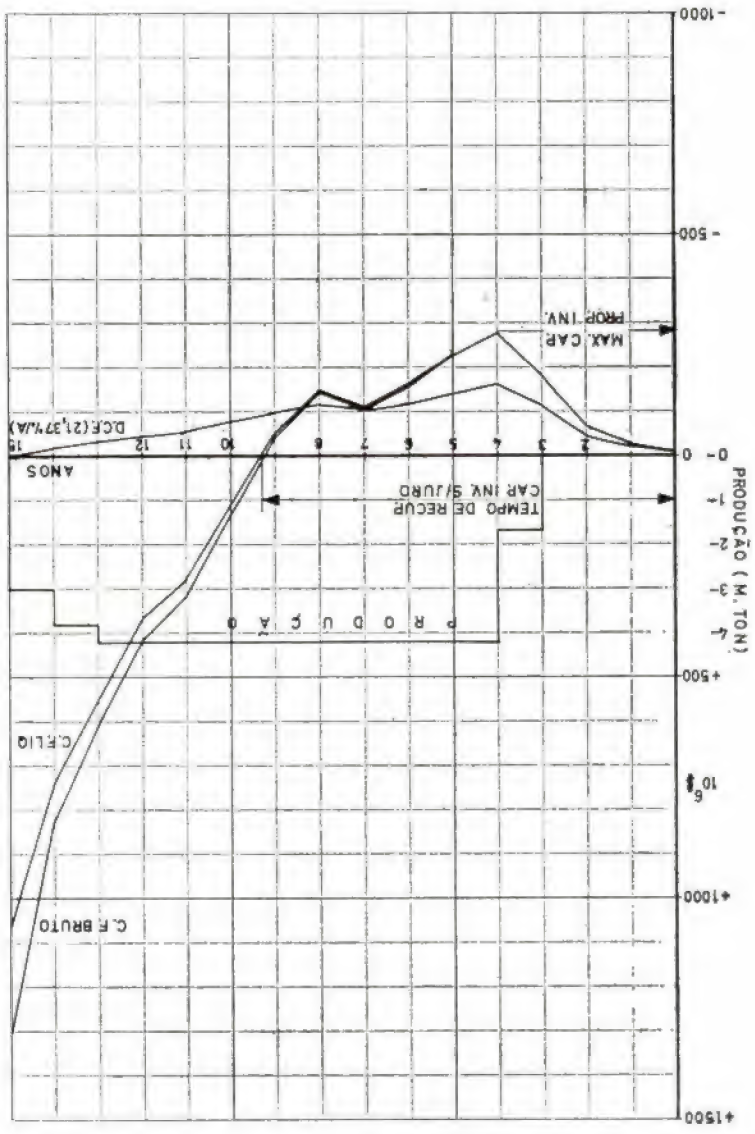


GRAFICO IV – CASH-FLOW
MODELO DE SENSIBILIDADE – FINANCIAMENTOS

```
10 DATA -8000,-14000,-40000,-261200,-345944,79377,195374,200799
11 DATA 103184,200919,185171,181236,93443,185489,178250,295179
30 DATA 0,6,.1634
RUN
```

```
DISCTS    12:21    LISBOA 03/07/71

CASH FLOW, NOT DISCOUNTED:
```

PERIOD	CASH FLOW AT END OF PERIOD	CASH FLOW DURING PERIOD	CUML. CASH FLOW END OF PERIOD
0	-8000	0	-8000
1	-14000	0	-22000
2	-40000	0	-62000
3	-261200	0	-323200
4	-345944	0	-669144
5	79377	0	-589767
6	195374	0	-394393
7	200799	0	-193594
8	103184	0	-90410
9	200919	0	110509
10	185171	0	295680
11	181236	0	476916
12	93443	0	570359
13	185489	0	755848
14	178250	0	934098
15	295179	0	1229277

ZERO-INTEREST BREAKEVEN POINT: 8.45 PERIODS

DISCOUNTED RATE OF RETURN: I = 17.9 PERCENT

PRESENT WORTH OF CASH FLOWS AT I = 17.9 PERCENT:

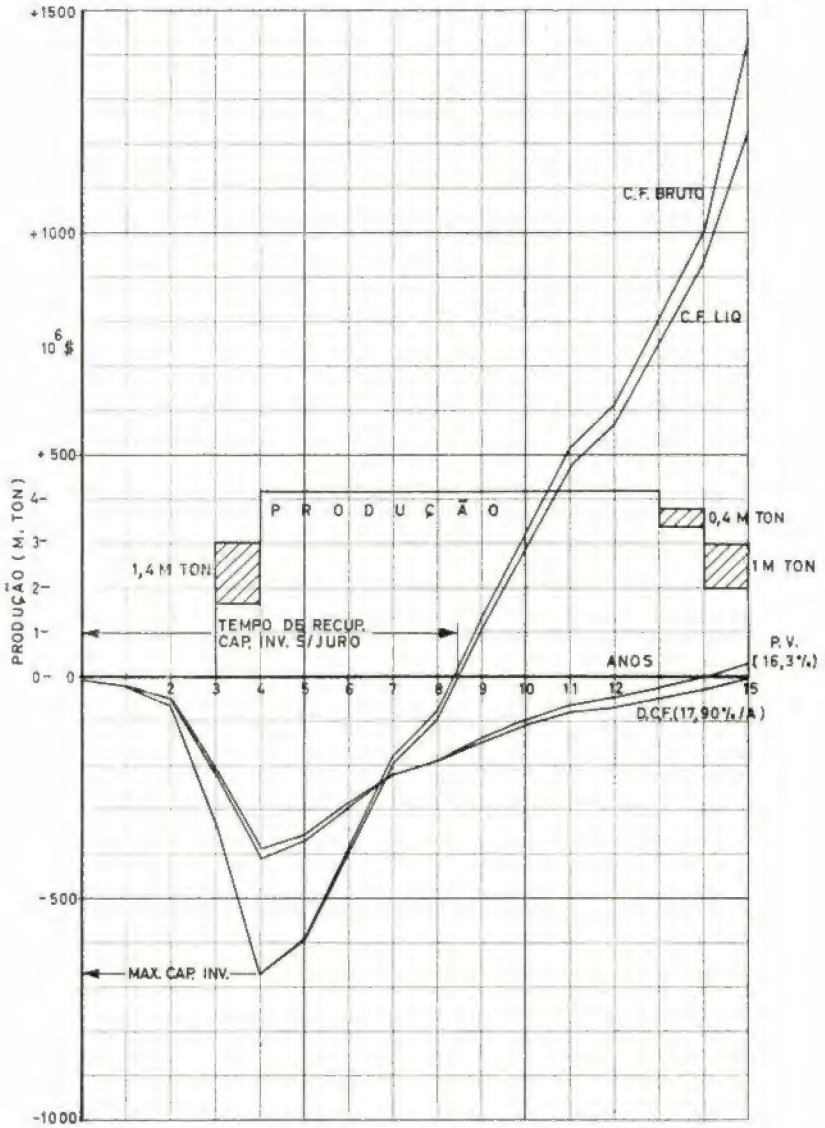
PERIOD	P.W. OF C.F. END OF PERIOD	P.W. OF C.F. DURING PERIOD	CUML. P.W. OF CASH FLOW
0	-8000	0	-8000
1	-11874	0	-19874
2	-28776	0	-48650
3	-159376	0	-208027
4	-179036	0	-387062
5	34843	0	-352220
6	72739	0	-279481
7	63408	0	-216072
8	27636	0	-188436
9	45643	0	-142793
10	35679	0	-107114
11	29619	0	-77496
12	12952	0	-64543
13	21807	0	-42736
14	17775	0	-24961
15	24965	0	4

PRESENT WORTH OF CASH FLOWS AT I = 16.34 PERCENT:

PERIOD	P.W. OF C.F. END OF PERIOD	P.W. OF C.F. DURING PERIOD	CUML. P.W. OF CASH FLOW
0	-8000	0	-8000
1	-12034	0	-20034
2	-29553	0	-49587
3	-165877	0	-215464
4	-188838	0	-404302
5	37243	0	-367058
6	78794	0	-288264
7	69606	0	-218657
8	30745	0	-187911
9	51459	0	-136452
10	40765	0	-95688
11	34295	0	-61393
12	15198	0	-46195
13	25932	0	-20263
14	21420	0	1157
15	30489	0	31647

GRAFICO V — CASH-FLOW

MODELO DE SENSIBILIDADE-AVANÇO DE PRODUÇÃO



```
10 DATA -8000,-14000,-40000,-261200,-409406,79377,195374,200715
11 DATA 103184,200836,185170,178554,199202,310000
30 DATA 0,6
RUN
```

```
DISCT$     12:02    LISBØA 03/07/71

CASH FLØW, NØT DISCØUNTED:
```

PERIØD	CASH FLØW AT END ØF PERIØD	CASH FLØW DURING PERIØD	CUML. CASH FLØW END ØF PERIØD
0	-8000	0	-8000
1	-14000	0	-22000
2	-40000	0	-62000
3	-261200	0	-323200
4	-409406	0	-732606
5	79377	0	-653229
6	195374	0	-457855
7	200715	0	-257140
8	103184	0	-153956
9	200836	0	46880
10	185170	0	232050
11	178554	0	410604
12	199202	0	609806
13	310000	0	919806

ZERØ-INTEREST BREAKEVEN PØINT: 8.77 PERIØDS

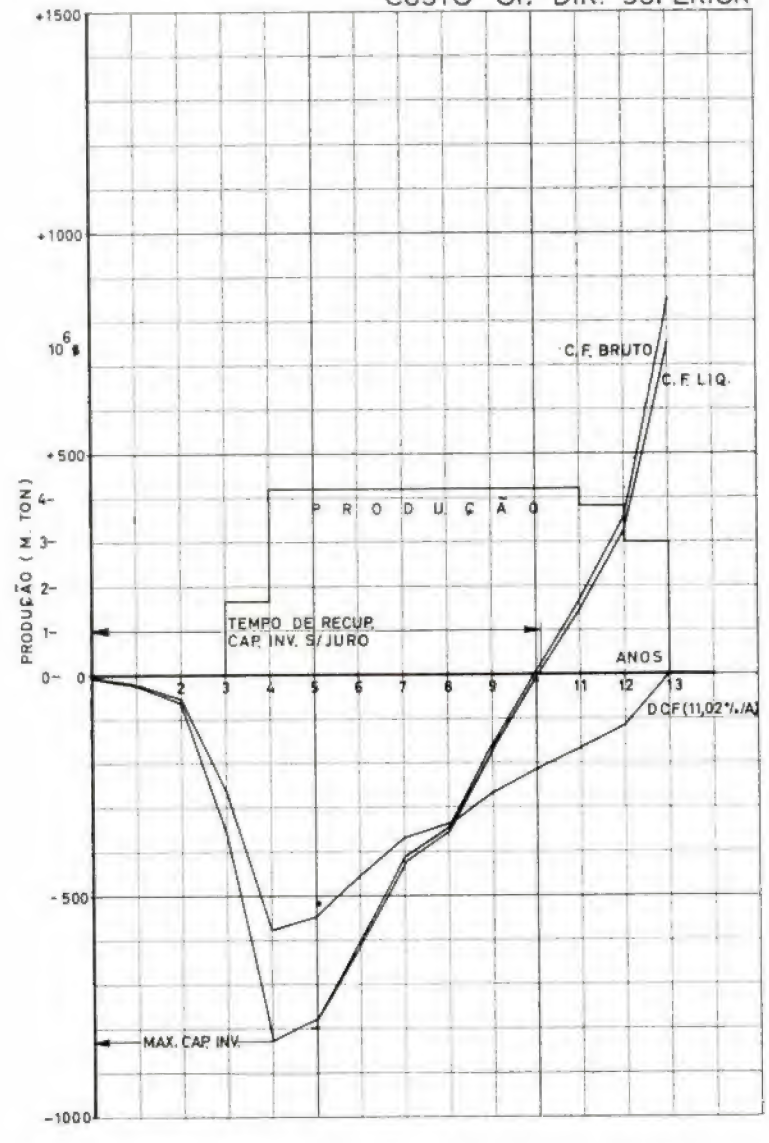
DISCØUNTED RATE ØF RETURN: I = 15.27 PERCENT

PRESENT WØRTH ØF CASH FLØWS AT I = 15.27 PERCENT:

PERIØD	P.W. ØF C.F. END ØF PERIØD	P.W. ØF C.F. DURING PERIØD	CUML. P.W. ØF CASH FLØW
0	-8000	0	-8000
1	-12145	0	-20145
2	-30104	0	-50249
3	-170535	0	-220784
4	-231886	0	-452670
5	39003	0	-413667
6	83281	0	-330386
7	74223	0	-256163
8	33102	0	-223061
9	55894	0	-167167
10	44707	0	-122460
11	37398	0	-85062
12	36196	0	-48867
13	48866	0	-1

GRAFICO VI — CASH-FLOW

MODELO DE SENSIBILIDADE - RESERVAS PROVAVEIS
- INVESTIMENTOS SUPERIORES
- CUSTO OP. DIR. SUPERIOR



4.5 — Sensibilidade Simultânea

Para exemplo de sensibilidade simultânea encaramos três hipóteses (duas das quais já analisadas individualmente), todas elas agravando a situação do modelo básico:

— Redução de Reservas Prováveis (4.1);
— Investimentos Superiores (4.2).
— Custos Operacionais Directos (Modelo Básico + 15 %).

Nestas circunstâncias, vamos encontrar para os indicadores habituais os seguintes valores:

MCI	— 826.435
TRC	— 10,10
TDIB	— 11,93
TDIL	— 11,02

Anexos: Gráfico VI, Folha Cálculo VI.

5 — CONCLUSÕES

5.1 — Conclusões de Carácter Económico

A fim de melhor analisar os indicadores obtidos para os diversos modelos, apresentam-se os mesmos sob a forma de Quadro, acrescidos do cálculo quantitativo de sensibilidade quer de TDIL em relação a TDIB — S (L/B)—quer de TDIL em relação a TDIL do modelo básico — S (L/MB).

Nestas circunstâncias, seriam possíveis as seguintes conclusões:

i) investir capital num empreendimento que apresenta uma «taxa de desconto interna» aproximada de 16 % com a recuperação do mesmo a cerca de 6 anos (8,77 — 2,5) mostra-se razoavelmente aliciante.

ii) Um problema fundamental põe-se no campo dos financiamentos porque eles são absolutamente necessários, e mais, pelo montante que atingem em face do capital próprio, requerem forçosamente um «aval».

iii) Uma acção esclarecedora dos aspectos macroeconómicos e sociais que o empreendimento porventura possa ter, constitui tema fundamental e imediato a desenvolver, no sentido de obter o referido «aval».

iv) Os financiamentos, além de «tornarem possível o empreendimento» trazem-lhe benefícios de carácter económico, aos quais é altamente sensível, e podem constituir a contrapartida de evoluções desvaroráveis em relação ao modelo básico.

v) Dentro dos campos analisados no presente trabalho, o empreendimento não se apresenta com alto grau de «risco», pois que, se três condições desfavoráveis ocorrerem simultâneamente (tendo em atenção que uma delas não é irreversível) a «taxa de desconto interna» ainda se situa na ordem dos 11 %.

QUADRO II

Indicador	3.2*	4.1*	4.2*	4.3*	4.4*	4.5
MCI	732.606	732.606	817.446	276.262	669.144	826.435
TRC	8,77	8,77	9,33	9,38	8,45	10,10
TDIB	17,82	17,13	15,33	23,30	19,22	11,93
TDIL	16,34	15,27	14,17	21,37	17,90	11,02
S (L/B) . . .	−8,30	−10,80	−7,50	−8,30	−6,90	−7,60
S (L/MB) . .	—	−6,55	−13,28	+30,08	+9,55	−32,50

* Referência do capítulo.

As conclusões a extrair destes indicadores dependem fortemente da constituição, disponibilidades, objectivos e panorâmica de outros investimentos da empresa que se propõe trabalhar o empreendimento.

Procuraremos exemplificar com um caso, porventura o mais corrente, de uma empresa com disponibilidades reduzidas em relação ao empreendimento em causa, e portanto fundamentalmente preocupado com o projecto que acabamos de analisar.

vi) Tem significado importante o esclarecimento e o controlo dos investimentos, bem como a aceleração imprimida ao projecto definitivo e sua execução, para que o agravamento provocado pelo aumento daqueles e o benefício trazido pelo início de produção mais cedo, resultem em saldo nulo ou mesmo positivo.

vii) O esclarecimento da existência total das Reservas Prováveis não constitui uma preocupação dominante, do ponto de vista da empresa, isto é, dentro do âmbito microeconómico.

5.2 — Conclusões Gerais

Os modelos económicos apresentados não são, de modo algum, todos aqueles a cuja análise seria conveniente proceder.

Portanto, apenas tentámos enquadrar alguns princípios de análise de investimentos num empreendimento mineiro, seguindo um caso hipotético e analisando alguns aspectos.

Recorda-se, por exemplo, que o preço de venda do minério foi sempre mantido constante, quer ao longo dos anos, quer ainda em todos os modelos; que os valores residuais das obras e equipamentos não se fizeram variar; que os custos operacionais tomaram um valor médio não só em relação às operações de desmatação, limpeza de jazigos, métodos de exploração e transporte de T. Q., como, e ainda, em relação ao rendimento em peso das operações de lavagem, concentração e calibragem.

Obviamente não se desceu ao pormenor de considerar as variações citadas, quer pela índole do trabalho, quer pela situação (em tempo) que atrás indicamos.

Em estágios superiores do conhecimento dos jazigos já seria conveniente pormenorizar, assim como separar as verbas dos saldos anuais (agora consideradas «discretas») em parcelas «discretas» e «contínuas».

Um caso concreto é pois suficientemente complexo mas fundamentalmente trabalhoso, para que a utilização de computadores (com preferência pelo sistema «Time - Sharing») traga proveitos inestimáveis.

BIBLIOGRAFIA

Merrett, A. J., & Sykes, A. — Capital Budgeting & Company Finance, Longmans — London — 1966.

Merrett, A. J., & Sykes, A. — The Finance and Analysis of Capital Projects, Longmans — London — 1963.

Groundwater, T. R. — The Role of Discounted Cash-Flow Methods in the Appraisal of Capital Projects: Retrospect and Prospect, Royal School of Mines, Imperial College — London — 1967.

Samuelson, P. — Economics — Introductory Analysis, International Students Edition, McGraw-Hill Book Co. — New York — 1967.

Michelson, R. W., Polta, H. J. — A Discounted Cash-Flow Model for Evaluating the Cost of Producing Iron Ore Pellets from Magnetic Taconite, Ten Years of Computing in Mineral Industry — New York — 1969.

Cash-Flow Analysis, (DISCT $ ***), G. E. Time-Sharing Service, Information Service Department — New York — 1969.

A energia nuclear nos países do Comecon

(Continuação da pág.ª 208)

A potência instalada nas centrais nucleares dos países do Comecon cifrava-se, em 1976, em 7500 MW, contra 1100 MW em 1971. Actualmente, aproxima-se dos 10 000 MW, prevendo-se que em 1980 atinja os 30 000 MW, correspondendo a uma produção de 200 milhões de MW/h. Assim, muito em breve, cerca de 10 % do consumo de electricidade dos países do Comecon será de origem nuclear, percentagem essa que, em 1990, atingirá 40-66 % na Bulgária, 26-35 % na Hungria, 13-15 % na Polónia, 22-26 % na RDA, 10-14 % na Roménia, 30-42 % na Checoslováquia e mais de 10 % na URSS.

A utilização da energia nuclear deu lugar à criação, para o sector, de dois organismos de carácter económico o Interatominstrument, ligado aos aspectos de investigação e equipamentos, e o Interatomenergo para a organização da construção das centrais.

Hoje em dia, a maior parte das centrais construídas na Europa de Leste está equipada com reactores VVER-440 (440 MW) com sistema de arrefecimento por água; entretanto, prevê-se que muito em breve a sua capacidade atinja 1000 MW (VVER-1000), assinalando-se a construção de outros reactores a neutrões rápidos.

URSS — A URSS possui centrais nucleares desde Junho de 1954, data da entrada em serviço, em Obinsk, da primeira central nuclear do Mundo. Em 1975, a sua capacidade instalada atingia os 4,7 milhões de kW, ou seja 2,2 % da capacidade total das centrais eléctricas do país, prevendo-se que em 1980 a capacidde nuclear instalada se eleve a 13-15 milhões de kW, para um total de 67-70 milhões de kW.

Das centrais nucleares projectadas, duas serão edificadas em comum com os países europeus do Comecon que participarão no seu financiamento e construção de acordo com os planos estabelecidos em 1977-88 pela Comissão Permanente para a Energia do Comecon. Localizadas em Khmel'nickij e em Konstantinovka, na Ucrânia, terão uma capacidade individual de 4000 MW. A Hungria, Checoslováquia, Polónia e URSS iniciaram já os trabalhos relativos à central de Khmel'nickij e da linha de alta tensão (750 kV) que a ligará à Polónia.

Bulgária — A primeira central nuclear búlgara foi construída em Kozloduj com o auxílio da URSS e equipada com dois reactores com uma potência total de 880 MW. A sua produção diária de electricidade é de 15 000-20 000 MWh, ou seja, cerca de 20 % de produção de electricidade do país.

Encontram-se em construção dois novos reactores que terão igualmente uma capacidade de 440 MW cada um, e que deverão entrar em funcionamento, respectivamente, em 1979 e em 1980. Nessa altura, a capacidade instalada totalizará 1860 MW e produzirá 50 % da electricidade do país.

Hungria — A primeira central

(Continua na pág.ª 292)

C. D. U. 519.28:622.271

Determinação do contorno final dum desmonte a céu aberto ("Ultimate Pit")

FERNANDO HUMBERTO MUGE
Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior Técnico

RESUMO

Formula-se na sua generalidade o problema da determinação do contorno final dum Desmonte a Céu Aberto.

Descreve-se o algoritmo de Lerchs e Grossman com base em noções da teoria dos grafos.

Introduz-se o método dos cones deslizantes aplicado ao algoritmo de Lerchs e Grossmann e dá-se um exemplo de aplicação. Descreve-se a estrutura básica de um programa que utiliza este método.

ABSTRACT

The problem of the determination of an ultimate pit contour in order to maximize some objective fonction is formulated in all its generality.

It is described the Lerchs and Grossmann alghoritm based in concepts of the graphs theory.

It is introduced the moving cone method applied to the Lerchs and Grossmann alghoritm and it's given an example of application. It is described the basic structure of a computer program which performs the above mentioned method.

INDICE

1. INTRODUÇAO
2. ALGORITMO

2.1. Formulação do problema
2.2 Algoritmo

3. MÉTODO DOS CONES DESLIZANTES APLICADO AO ALGORITMO DE LERCHS E GROSMANN
4. BIBLIOGRAFIA
ANEXO

PROGRAMAÇÃO DE DESMONTES

— Determinação do Contorno Final dum Desmonte a Céu Aberto («Ultimate Pit»)

1 — Introdução

O problema que iremos abordar insere-se no quadro geral do planeamento de uma exploração a céu aberto.

Em toda a sua generalidade o problema de determinacão da corta optimizante é um problema de selecção a longo prazo, isto é, é um problema de cálculo de reservas.

Como tal faz intervir três tipos de estruturas, a saber:

— A estrutura da mineralização (regionalização do espaço mineralizado);
— a estrutura tecnológica que actua através dos processos de extracção e de concentração ou tratamento. sendo o seu impacto na definição da corta optimizante de natureza essencialmente geométrica através da definição do tamanho. forma a implantação das unidades a extrair (bloco tecnológico de desmonte);
— a conjuntura económica que implanta em cada época uma rede de mercados e de preços que condiciona fortemente as várias fases de um empreendimento mineiro.

Quanto aos parâmetros económicos vamos supô-los conhecidos através de um estudo prévio do mercado.

Supunhamos ainda que ensaios laboratoriais nos permitiram definir o melhor método de exploração e/ou de tratamento do mineral ou dos minerais a explorar.

Por outro lado é suposto que os trabalhos de reconhecimento executados nos permitiram atribuir a cada bloco tecnológico, com margem de erro aceitável, estimadores das variáveis regionalizadas que intervêm no cálculo de reservas (teores, rendimentos de processos de tratamento, etc...). Como se sabe a margem de erro será mínima se os estimadores referidos forem obtidos por krigagem (v. g. Prática de Krigagem e Parametrização).

Posto o problema em toda a sua generalidade, o que se pretende é determinar o contorno final dum desmonte a céu aberto que conduza à maximização duma função objectivo. Um exemplo corrente duma tal função é a diferença entre o valor total do minério e o custo total do desmonte do minério mais estéril.

$$\begin{cases} B = AT\ m(x) - CT - C'T & \text{— para minério de teor médio } m(x) \\ \quad = -C'T & \text{— para estéril} \end{cases}$$

em que A : preço de venda do metal por tonelada de tal-qual

C : custo do desmonte do minério por tonelada de tal-qual

C' : custo do desmonte da tonelada de esril.

Os modelos matemáticos que se descrevem a seguir visam alcançar o objectivo indicado tendo em atenção apenas restrições de tipo geométrico que, usualmente, são o máximo ângulo de talude admissível e a profundidade as quais são determinadas pelo tipo de material a desmontar.

Pretende-se pois determinar o valor de V que maximize:

$$\int_V B(x, y, z)\ dx\ dy\ dz$$

Onde V designa o volume associado ao contorno óptimo tal que em qualquer dos seus pontos a sua inclinação em relação a um plano horizontal não exceda o ângulo $\alpha(x, y, z)$ fixado. (Ângulo de talude máximo admissível).

2 — Algoritmo de Lerchs e Grossmann

O algoritmo de Lerchs e Grossmann permite, utilizando conceitos da Teoria dos grafos (v. g. Anexo) determinar o contorno final óptimo de uma exploração a céu aberto.

2.1 — Formulação do problema

Considere-se o jazigo a explorar discretizado em blocos paralelipipédicos (blocos unitários) de volume V_1. Note-se que a dimensão destes blocos está condicionada por aspectos tecnológicos (método de exploração adoptado) mas na maior parte dos casos a informação disponível não permite uma estimação suficientemente precisa de teor médio dos blocos sobre os quais irá incidir a selecção futura [1].

O bloco a adoptar terá portanto que estar de acordo com a densidade de informação disponível sob pena de o planeamento perder toda a validade visto basear-se em estimadores com margem de erro inaceitável.

Posto isto pode-se associar a cada bloco de volume V_i um valor da função objectivo: B_i. O que se pretende portanto é encontrar a combinatória de blocos que maximize: $\sum_i B_i$, respeitando os constrangimentos de ordem geométrica atrás referidos.

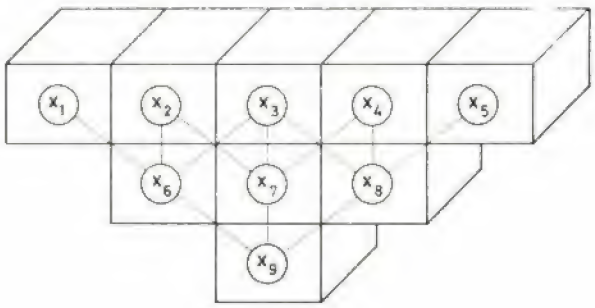
Suponha-se que cada bloco *i* é representado pelo vértice x_i dum grafo e considerem-se neste os arcos orientados (x_i, x_j) se o bloco j tiver pelo menos um ponto comum com o bloco i e se o desmonte de *i* implicar o de j.

Obtém-se deste modo um grafo tridimensional orientado (1).

$G = (X, \nu)$ formado pelo conjunto X de vértices x_i e pelo conjunto ν de arcos (x_i, x_j).

Vê-se facilmente que qualquer contorno admissível de desmonte, i. e., qualquer contorno que satisfaça as restrições de tipo geométrico impostas, é representado por um fecho do grafo $G = (X, \nu)$.

Raciocinando apenas para a fatia vertical representada na fig., que não implica perda de generalidade, e notando que



o grafo G define uma aplicação Γ de X em X tal que

$$(x_i, x_j) \in \nu \iff x_j \in \Gamma(x_i)$$

segue-se, de acordo com a definição de fecho, que

$$\hat{\Gamma}(x_i) = \{x_i\} = Y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$\hat{\Gamma}(x_6) = \{x_6\} \cup \Gamma(x_6) = \{x_6\} \cup \{x_1, x_2, x_3\} = Y_6$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{\Gamma}(x_9) = \{x_9\} \cup \Gamma(x_9) \cup \Gamma^2(x_9) = \{x_9\} \cup \{x_6, x_7, x_8\} \cup (\Gamma(x_6) \cup \Gamma(x_7) \cup \Gamma x_8)) = \{x_1, x_2 \ldots, x_9\} = Y_9$$

(1) Repare-se que o par x_i, x_j é um par ordenado.

Verifica-se portanto que qualquer fecho Y de $G = (X, \gamma)$ é um contorno admissível.

Associando a cada vértice x_i de $G = (X, \gamma)$ o valor algébrico $m_i = v_i - c_i$ denominado por massa do vértice x_i pretende-se encontrar o fecho de G de massa total máxima, isto é, deseja-se conhecer o conjunto

$$Y \subset X \text{ tal que } x_i \in Y \Longrightarrow \Gamma(x_i) \in Y$$

e

NORMALIZAÇÃO DE UMA ÁRVORE

(EXEMPLO)

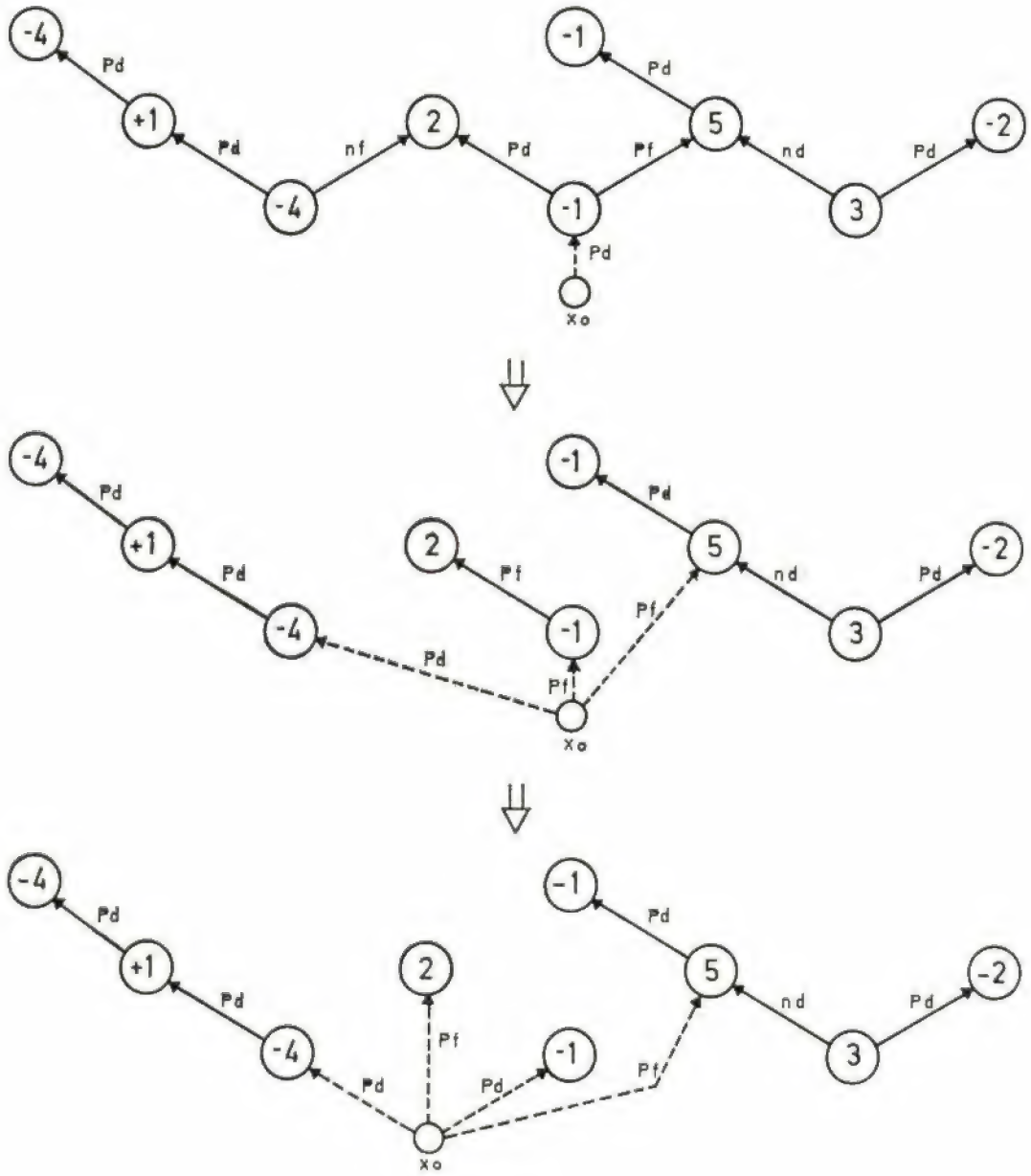


Fig. 1

$$M_Y = \sum_{x_i \in Y} m_i \qquad \text{é máximo.}$$

2.2 — Algoritmo

Inicialmente o grafo G indicado em 2.1 é ampliado com um vértice fictício x_o e arcos (x_o, x_i) de modo a construir-se em G uma árvore inicial A^o normalizada.

O processo mais simples para construir A^o consiste em obter o grafo orientado (X, υ_o) em que υ_o é o conjunto de todos os arcos fictícios (x_o, x_i). Tal grafo é a primeira árvore A^o.

A árvore A^o é então transformada em sucessivas árvores $A^1, A^2, \ldots, A^n$ de acordo com determinadas regras até que não sejam possíveis novas transformações. O fecho máximo é então dado pela soma das massas dos vértices dum conjunto de determinados ramos bem identificados da árvore final (vidé Teorema em Anexo).

Construída a árvore A^o entra-se num processo iterativo. A iteração de ordem k+1 transforma a árvor normalizada A^k na árvore normalizada A^{k+1}. Cada árvore $A^k = (X, \upsilon_k)$ é caracterizada pelo seu conjunto υ_k de arcos e pelo conjunto Y^k dos seus vértices fortes. O processo iterativo termina quando Y é um fecho de G.

A iteração de ordem k+1 contém os seguintes passos:

1. Construção da árvore normalizada A^k.
2. Se existe um arco (x_i, x_j) em G tal que $x_i \in Y^k$ e $x_j \in X\text{-}Y^k$ ir para 3, caso contrário passar a 7.
3. Achar a raiz x_k do ramo forte que contém x_j.
4. Construir a árvore A^1 substituindo o arco (x_o, x_k) de A^k pelo arco (x_i, x_j).
5. Normalizar A^1 o que conduz a A^{k+1}.
6. Ir ao número 1.
7. Fim. Y^k é o fecho máximo de G.

Lerchs e Grossmann [4] além de justificarem os diferentes passos do algoritmo demonstram que se atinge o objectivo desejado com um número finito de iterações.

ALGORITMO DE LERCHS E GROSSMANN

(EXEMPLO DE APLICAÇÃO)

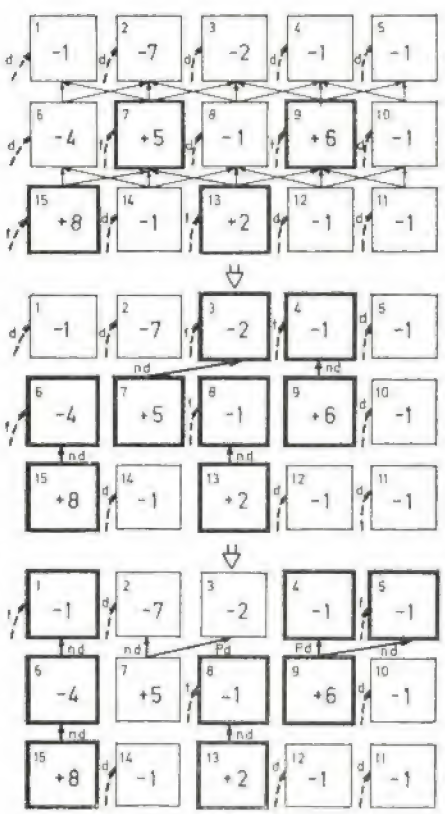


Fig. 2

ALGORITMO DE LERCHS E GROSSMANN

(EXEMPLO DE APLICAÇÃO)

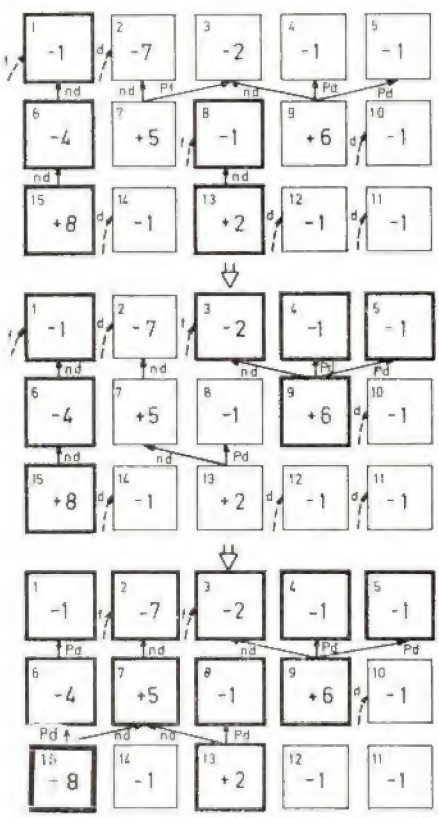


Fig. 3

Organigrama de blocos

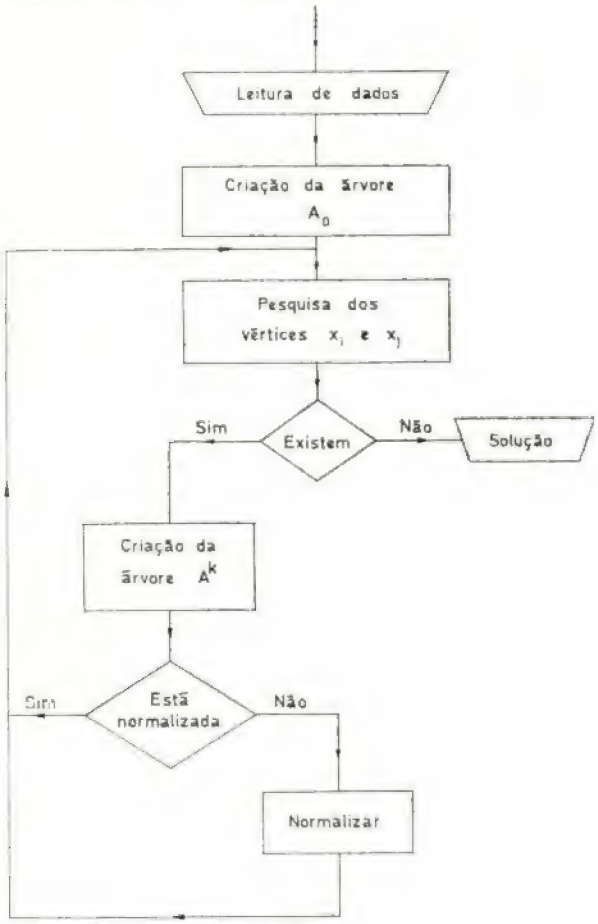


Fig. 4

3 — Método dos cones deslizantes aplicado ao algoritmo de Lerchs e Grossman (ALG.)

Este método tem sobre os clássicos métodos de cones deslizantes («moving cone methods») a vantagem de seguir os passos do ALG.

Assim, o cone de um bloco (vértice) genérico x_K é um sub-grafo fechado do grafo inicial G e o conjunto X_K dos seus blocos (vértices) é um fecho do grafo G.

Por outro lado dada uma árvore A (sub-grafo de G) que contenha o cone do bloco x_K, este identifica-se com o ramo R_K podendo ser forte ou fraco consoante a massa global (valor total) dos vértices que o constituem (cone forte ou fraco). O método identifica e conserva em memória os sucessivos cones fortes e fracos.

Os sucessivos cones vão sendo transformados com adições e subtracções de blocos tal como na normalização das árvores construídas no ALG.

Os sucessivos passos do método são apresentados na Fig. 8 e podem ser separados em quatro partes ou ciclos do programa. As quatro partes diferenciáveis no método permitem a identificação de fechos, cones fracos e fortes e realizam as transformações descritas no ALG.

O primeiro grupo de instruções permite a identificação dos blocos de minério existentes no depósito (blocos para os quais a função objectivo tem valor positivo).

O segundo ciclo só intervém quando é encontrado um bloco de minério e pesquisa a existência de blocos suprajacentes que pertençam ao cone do bloco de minério não identificado no primeiro grupo de instruções e que não tenham sido previamente desmontados. Por definição, os blocos suprajacentes a um dado bloco de minério, são aqueles cujo desmonte é necessário para efectuar o desmonte desse bloco.

O terceiro grupo de instruções efectua a normalização dos cones fortes e fracos. Este terceiro ciclo só intervém quando o bloco suprajacente é por sua vez membro dum cone fraco cujos vértices ou blocos constitutivos permanecem em memória. Neste caso, três situações podem ocorrer (vidé Fig. 5):

1 — O valor total do cone forte do bloco inicial somado com o do bloco suprajacente é negativo ou nulo. Neste caso, o cone forte não consegue suportar mais um bloco suprajacente e passa a fraco e o programa prossegue com a pesquisa de outro bloco de minério (1.° ciclo de instruções).

2 — O valor total do cone forte do bloco inicial com o do bloco interseptado é positivo, mas o cone fraco a que pertence este bloco continua fraco mesmo sem ter que o suportar. Neste caso o bloco suprajacente é arrastado pelo cone do bloco inicial, desligando-se do cone fraco e o programa prossegue com o 2.° ciclo de instruções que pesquisa novo bloco suprajacente.

3 — O valor total do cone forte do bloco inicial com o do cone fraco a que pertence o bloco suprajacente, é positivo. Neste caso ambos os cones podem suportar os blocos suprajacentes e os blocos do cone fraco passam a pertencer ao cone forte do bloco inicial. O programa prossegue com a execução do 2.° ciclo de instruções (pesquisa de blocos suprajacentes pertencentes ao cone e não desmontados).

O quarto ciclo de instruções garante que o cone forte do bloco inicial seja um fecho do grafo inicial G. Isto porque os cones fracos interseptados pelo cone forte podem não ser completos, isto é, podem não atingir a superfície. No caso de tal acontecer o programa reentra no 2.° ciclo de instruções e a rotina continua através do 2.°, 3.° e 4.° ciclos até que o cone forte passe a fraco com demasiados blocos suprajacentes ou até que o fecho esteja completo. Neste caso todos os blocos pertencentes ao cone forte do bloco inicial são desmontados.

Em ambos os casos o programa prossegue com o 1.° ciclo de instruções até que todos os blocos de minério tenham sido examinados.

Neste caso o programa executa ainda um 5.° ciclo de instruções cuja finalidade é detectar a existência de cones fracos que, devido ao facto

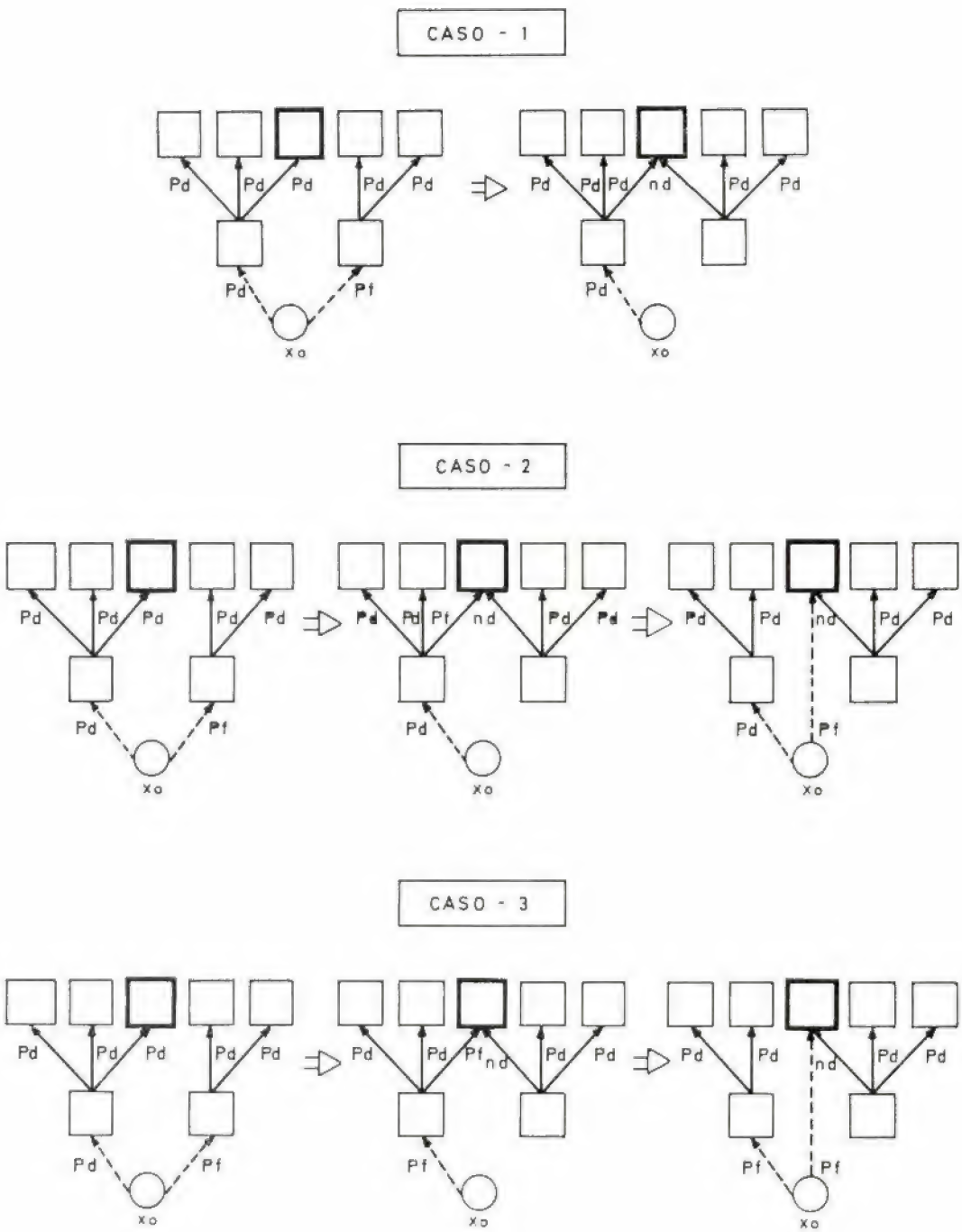

CASO - 1
Pd
Pd
Pd
Pd
Pd
Pd
Pf
xo
Pd
Pd
Pd
nd
Pd
Pd
Pd
xo
CASO - 2
Pd
Pd
Pd
Pd
Pd
Pd
Pf
xo
Pd
Pd
Pf
nd
Pd
Pd
Pd
xo
Pd
Pd
nd
Pd
Pd
Pd
Pf
xo
CASO - 3
Pd
Pd
Pd
Pd
Pd
Pd
Pf
xo
Pd
Pd
Pf
nd
Pd
Pd
Pf
xo
Pd
Pd
nd
Pd
Pd
Pf
Pf
xo

Fig. 5

de alguns dos seus blocos terem sido arrastados por cones fortes e desmontados, podem passar a fortes e serem eles próprios também desmontados.

— *Exemplo* (v. g. Figs. 6 e 7)

O 1.º ciclo de instruções inicia-se com a pesquisa de um bloco de minério. O bloco 7 é o primeiro a ser encontrado. Entra-se então no 2.º ciclo de instruções que permite procurar os blocos suprajacentes pertencentes ao cone do bloco 7 e ainda não desmontados. O primeiro bloco nestas condições é o bloco 3. Como o valor total da função objectivo após se ter acrescentado o valor do bloco 3 continua positivo, o 2.º ciclo de instruções prossegue a pesquisa de novo bloco suprajacente e encontra o bloco 2. O cone passa a fraco com a adição do bloco 2 e regressa-se ao 1.º ciclo de instruções procurando novo bloco de minério.

O bloco de minério seguinte é o 9. O 2.º ciclo de instruções adiciona os blocos 5 e 4 do cone, mas quando encontra o bloco 3 que pertence ao cone do bloco 9 e também ao cone fraco do bloco 7, passa ao 3.º ciclo de instruções. O bloco 3 é retirado do cone fraco e acrescentado ao cone forte do bloco 9 devido a este permanecer positivo com o bloco 3 incluso, tal não acontecendo ao cone fraco do bloco 7 que permanece negativo sem o bloco 3 (vidé caso 2 fig. 5). O 2.º ciclo de instruções prossegue e como não há mais nenhum bloco pertencente ao cone do bloco 9, passa ao 4.º ciclo de instruções. Como nenhum cone fraco foi acrescentado ao cone forte, a rotina afecta todos os blocos pertencentes ao cone do bloco 9, ao desmonte.

O 1.º ciclo de instruções detecta o bloco 13 e o 2.º ciclo adiciona o bloco 8 ao cone do bloco 13 e seguidamente encontra o bloco 7 que pertence a um cone fraco (que inclui o bloco 2). O bloco 7 é retirado do cone fraco e passa a pertencer ao cone forte do bloco 13 (3.º ciclo — 2.º caso). O 2.º ciclo prossegue até encontrar o bloco 2 que pertence a um cone fraco. O 3.º ciclo transforma o cone forte do bloco 13 em cone fraco ao adicionar-lhe o bloco 2 (1.º caso Fig. 5).

O último bloco de minério é o 15. O 2.º ciclo prossegue até encontrar o bloco 7. Este bloco pertence ao cone do bloco 15 e também ao cone fraco que inclui os blocos 8 e 13.

Neste caso o cone forte mais o cone fraco são positivos e o 3.º ciclo de instruções adiciona-os (3.º caso v. g. Fig. 5).

Os blocos 6, 2 e 1 são adicionados ao cone forte do bloco 13 à medida que o 2.º ciclo prossegue a pesquisa de blocos suprajacentes. Como houveram 2 cones fracos que interceptaram o cone forte do bloco 13, o 4.º ciclo de instruções vai pesquisar se algum deles está incompleto. Como ambos estão completos, todos os blocos referidos são afectos ao desmonte e o programa termina porque não se encontra em memória qualquer outro cone fraco que seja necessário recuperar (5.º ciclo de instruções).

MÉTODO DOS CONES DESLIZANTES APLICADO AO ALG
(EXEMPLO DE APLICAÇÃO)

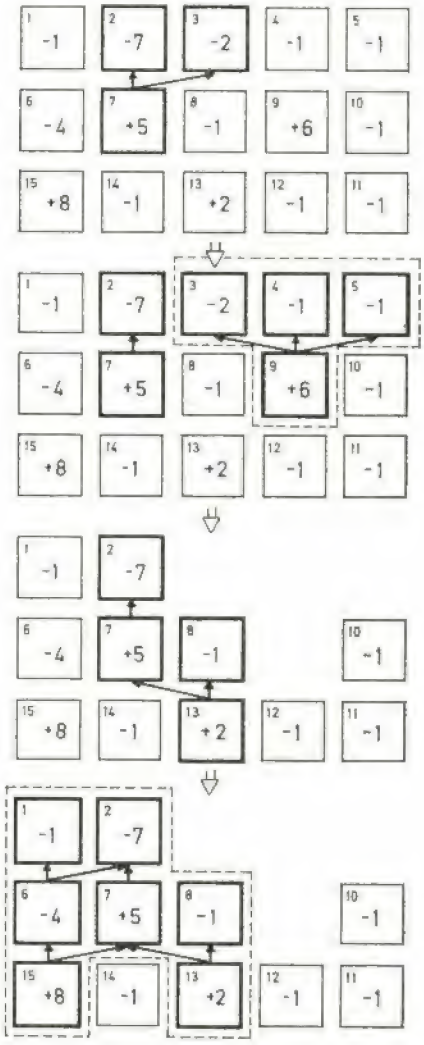


Fig. 6

MÉTODO DOS CONES DESLIZANTES APLICADO AO ALGORITMO DE LERCHS E GROSSMANN

(DIAGRAMA DE BLOCOS)

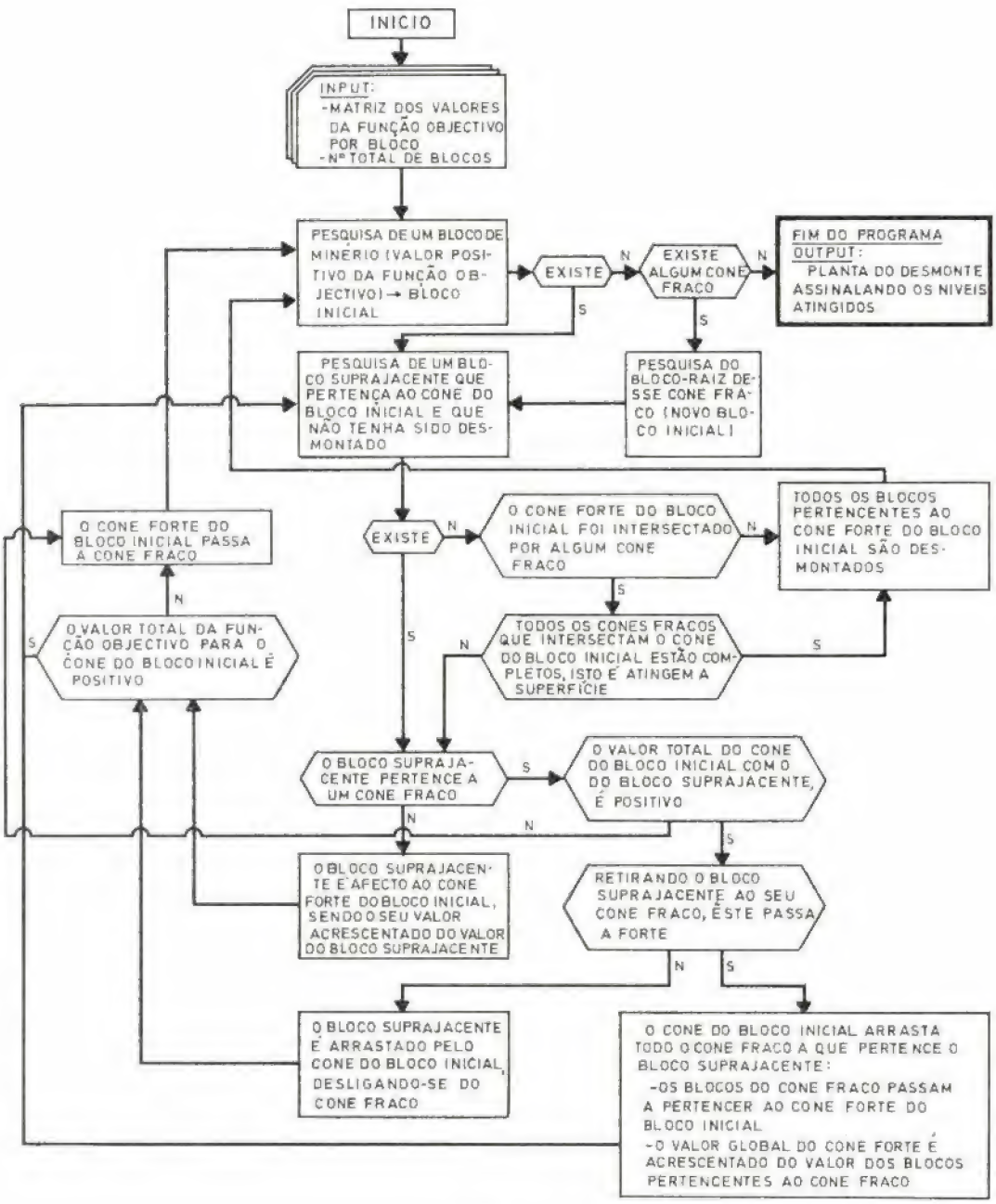


Fig. 7

4 — Bibliografia

[1] — **Bongarçon, D. F., Marechal, A., 1976.** «A New method for open-pit design parametrization of the final pit contour». 14th APCOM, Pennsylvania State University.

[2] — **Costa, R., Santos, N. A., 1972.** «Optimização dum contorno de exploração». Publicação interna, Departamento de Planeamento Mineiro do I. S. T., Lisboa.

[3] — **Johnson, T. B., Mickle, D. G., 1971.** «Optimum design of an open pit — An application in uranium».
Decision Making in the Mineral Industry pp. 331-337 Canadian Institute of Mining and Metallurgy, Special Volume n.º 12 — Montréal.

[4] — **Lerchs, H., Grossmann, I. F., 1965.** «Optimum design of open pit mines». *C. I. M. Bulletin*, vol. 58, n.º 633, pp. 47-54.

[5] — **Lipkewich, M. P., Borgman, I., 1969.** «Two and three - dimensional pit design optimization techniques». AIME-SME International Symposium, Computer Applications and Operations Research in the Mineral Industry Port City Press, Inc. Baltimore, Maryland.

[6] — **Robinson, R. H., 1975.** «Programming the Lerchs-Grossmann Algorithm for open pit mines». 13th APCOM, B — IV (1-17).

ANEXO

Vejamos alguns conceitos da teoria dos grafos que estão na base do algoritmo de Lerchs e Grossmann:

Grafo G de ordem n é definido como sendo a reunião de um conjunto numerável X de elementos X_j (j = 1, 2 ..., n), chamados vértices de G, com um conjunto ν de pares de elementos de X, chamados arcos do grafo. Simboliza-se por $G = (X, \nu)$.

O grafo G define também uma aplicação multívoca Γ de X em X tal que

$$(X_i, X_j) \in \nu \iff X_j = \Gamma X_i$$

Pode simbolizar-se, portanto, também por $G = (X, \Gamma)$.

Grafo parcial dum grafo $G = (X, \Gamma)$ é um grafo $G' = (X, \Delta)$ em que para $\forall X_i \Delta X_j \in \Gamma X_i$, isto é, é um grafo com o mesmo número de vértices mas com deficiência de um arco, pelo menos.

Sub-Grafo de um grafo $G = (X, \Gamma)$ é um grafo $G' = (A, \Gamma_A)$ em que

$$A \subset X \quad \wedge \quad \forall X_i \in A \quad \Gamma_A X_i = (\Gamma X_i) \cap A$$

isto é, um sub-grafo de um grafo é um grafo particular que contém apenas parte dos vértices e arcos do grafo total.

Caminho é toda a sucessão de arcos $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ tal que o extremo final de cada arco é o extremo inicial do seguinte.

Árvore é um grafo finito conexo sem ciclos e com pelo menos dois vértices.

Árvore com raiz é uma árvore com um vértice particular — a raiz. Naturalmente que qualquer vértice pode ser raiz.

Ramo e «ramificação» — O grafo que se obtém suprimindo um arco μ_i numa árvore A com raiz tem duas componentes. A componente A_i que não contém a raiz da árvore A é denominada ramo de A.

A raiz do ramo A_i é o vértice do ramo, adjacente ao arco μ_i.

Um ramo é uma árvore, e os ramos dum ramo designados por ramificações (twigs).

Suponhamos que a cada vértice x_i do grafo $G = (X, \nu)$ está associado o valor algébrico m_i, denominado de massa do vértice x_i. Admita-se que tal grafo é uma árvore $A = (X, \overline{\nu})$.

Cada aresta $\overline{\mu_i}$ (arco μ_i) da árvore A define um ramo A_i notado por $A_i = (X_i, \nu_i)$. A aresta $\overline{\mu_i}$ designa-se por suporte do ramo A_i e a massa M_i de um ramo A_i é a soma das massas de todos os seus vértices. A massa M_i diz-se associada à aresta $\overline{\mu_i}$ (arco μ_i) ($\overline{\mu_i}$ suporta a massa M_i).

Na árvore da fig. 2, 9-6-3-7 é um ramo o qual tem, p. ex., 6-9 como ramificação.

Na árvore exemplificada o vértice x_o é o que se chama uma raiz ficticia pois podem referenciar-se, directa ou indirectamente, em relação a x_o todos os vértices da árvore. O vértice adjacente ao vértice fictício é tomado para raiz propriamente dito da árvore. (Vértice 1).

Circuito é um caminho finito, formado pelos arcos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ no qual o extremo inicial de μ_1 coincide com o extremo final de μ_k.

Fecho de um grafo finito $G = (X, \Gamma)$ é um fecho de Γ, isto é, é uma aplicação $\overset{*}{\Gamma}: X \rightarrow X$ definida por

$$\overset{*}{\Gamma}(X_i) = \{X_i\} \cup \Gamma(X_i) \cup \overset{2}{\Gamma}(X_i) \cup \ldots$$

De outro modo é um conjunto de vértices $Y \subset X$ tal que se

$$X_i \in Y \Longrightarrow \Gamma(X_i) \in Y$$

Prop. Se Y é um fecho de $G = (X, \Gamma)$ então $G = (Y, \Gamma_Y)$ é um sub-grafo de $G = (X, \Gamma)$.

Aresta dum grafo $G = (X, \nu)$ é todo o conjunto de dois vértices X_i e X_j tais que

$$(X_i, X_j) \in \nu \quad \text{e/ou} \quad (X_j, X_i) \in \nu \quad \text{com } X_i \neq X_j$$

Uma aresta é, portanto, um par de vértices ligados por um arco num sentido ou no outro, ou por dois arcos de sentidos opostos.

Uma aresta é, geralmente, simbolizada por uma letra minúscula com um traço por cima, p. ex., $\overline{\mu} = \overline{(X_i, X_j)}$ e o conjunto de todas as arestas por $\overline{\nu}$.

Cadeia é toda a sucessão de arestas $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots)$ em que cada aresta $\bar{\mu}_k$ está ligada a $\bar{\mu}_{k-1}$ por uma das suas extremidades e a $\bar{\mu}_{k+1}$ pela outra extremidade. Designa-se geralmente pelos vértices que contém.

Ciclo é toda a cadeia finita que parte dum vértice X_i e chega ao mesmo vértice.

Ciclo é toda a cadeia finita que parte dum vértice X_i e chega ao mesmo vértice.

Grafo conexo é todo o grafo para o qual $\forall$ X_i, X_j $(X_i \neq X_j)$ existe uma cadeia de X_i para X_j.

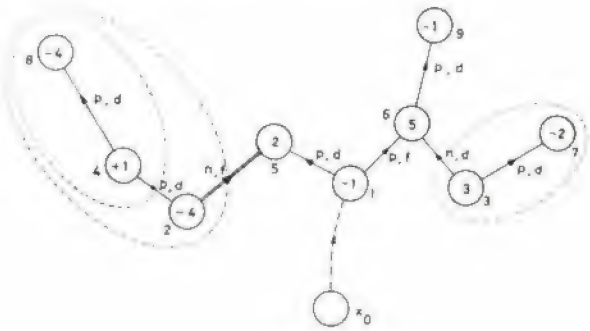


Fig. 1

Arestas p e n

Numa árvore com raiz fictícia x_o uma aresta $\bar{\mu}_i$ (ramo A_i) é caracterizada pela orientação do arco μ_i em relação a x_o:

— $\bar{\mu}_i$ é uma aresta positiva (aresta — p) se o vértice final está mais afastado de x_o que o vértice inicial. A_i é então denominado de ramo positivo (ramo — p).

— $\bar{\mu}_i$ é uma aresta negativa (aresta — n) no caso contrário. Neste caso A_i é um ramo negativo (ramo — n).

Classificação análoga se pode fazer para os ramos dum ramo.

Arestas f e d

Diz-se que uma aresta $\bar{\mu}_i$ (ou um ramo A_i) é forte (f) se sendo positiva suporta uma massa estritamente positiva ou sendo negativa suporta uma massa nula ou negativa. No caso contrário a aresta (ou ramo) diz-se débil (d).

Vértices f e d

Um vértice x_i diz-se forte (f) se a cadeia entre x_i e x_o contém pelo menos uma aresta forte, caso contrário o vértice diz-se débil (d).

Na fig. 1 são vértices fortes 2, 4, 8, 3, 6, 7 e 9.

Árvore normalizada — Uma árvore diz-se normalizada se a raiz fictícia x_o é um vértice comum a todas as arestas fortes.

Normalização duma árvore

Qualquer árvore A dum grafo G pode ser normalizada substituindo os arcos (x_i, x_j) de arestas — p f por arcos fictícios (x_o, x_j) e os arcos (x_i, x_j) de arestas — n f por arcos fictícios (x_o, x_i). Este processo é repetido até que todas as arestas — f tenham x_o como um vértice comum a todas as suas extremidades.

Lerchs e Grossmann [4] demonstram que:

Prop. 1 *Se um vértice x_i pertence ao fecho máximo Y (fecho de massa máxima) duma árvore normalizada A, então todos os vértices X_i do ramo A_i também pertencem a Y.*

Prop. 2 *O fecho máximo duma árvore normalizada é o conjunto Y dos seus vértices fortes.*

Teorema: *Se num grafo orientado G' é possível construir uma árvore normalizada tal que o conjunto Y dos vértices fortes de A é um fecho de G', então Y é o fecho máximo de G'. (1)*

(1) O grafo G' aqui considerado supõe-se ser o grafo inicial G ampliado dum vértice fictício x_o com uma massa negativa e arcos fictícios (x_o, x_i) ligando x_o a todos os vértices x_i. Dado que x_o não pode fazer parte de qualquer fecho máximo de G a introdução de arcos fictícios (x_o, x_i) não afecta a resolução do problema formulado.

C. D. U. 622.2:519.28

Programação de desmontes em lavra subterrânea
(Estacionarização de parâmetros)

J. BEJA COSTA (1)
JORGE VALENTE (2)

RESUMO

A exploração de minério de ferro da «Companhia Mineira do Lobito, S. A. R. L.» (Cassinga-Angola; 6×10^6 ton/ano de concentrados) foi programada, durante 6 anos, com sucesso na estacionarização de parâmetros, tais como o número de máquinas em operação nos desmontes, o teor dos concentrados e o respectivo rendimento em peso, assim como na repartição de finos (1/5 mm) nesses concentrados. Nesta programação de desmonte introduziram-se ainda alguns melhoramentos, tais como a optimização da recuperação em peso, com a introducão de um algoritmo computorizado e mantendo simultaneamente o teor em ferro dos concentrados num certo valor pré-determinado; um outro melhoramento foi o estabelecimento de uma sequência de desmonte que define as combinações de blocos a serem desmontados simultaneamente ou sequencialmente, de forma a se assegurar as condições descritas anteriormente.

Este método de programação é agora adaptado ao caso particular das minas subterrâneas e é demonstrada a forma de relacionar o cálculo dos diferentes tipos de equipamento destas minas pela primeira vez, segundo supomos.

No final descreve-se um exemplo prático de aplicação do método; este exemplo refere-se à Mina do Moinho (Aljustrel) de «Pirites Alentejanas S. A. R. L.».

SINOPSYS

The exploitation of the iron ores of «Companhia Mineira do Lobito S. A. R. L.» (Cassinga-Angola; 6×10^6 PPY of concentrates) is based upon a sophisticated planning schedule which, for six years, has been successful in keeping several pertinent parameter steady, such as the number of operating machines in the mine, the iron content and the weight recovery of the concentrates, as well as the proportion of fines (1/5 mm) in such concentrates. In this planning schedule some improvements was introduced, such as the optimization of the obtained weight recovery, with the introdution of a computerized optimization algorithm, and simultaneously keeping the iron content of the concentrates at a predetermined value; another improvement was the establishment of working criteria for the mine which define the combination of blocks to be simultaneously or sequentially treated in order to ensure the conditions described.

All this method is now, in the present text, adaptated to the particular case of the underground mines and the way to relationate the calculation of the number of the diferent types of equipment used in that mines is shown, we suppose, for the first time.

In the end, a pratical example of the method is also described; this example concerns to the Mina do Moinho (Aljustrel) of the Company «Pirites Alentejanas, S. A. R. L.».

1. OBJECTIVO-INTRODUÇÃO

No I Congresso Hispano-Luso-Americano de Geologia Económica (I CHILAGE, Setembro 1971) **J. Q. Rogado, J. M. Torres, J. C. Marques** e **D. T. Manso** apresentaram duas comunicações complementares intituladas:

— **«Optimização, por um método directo, da alocação de um minério a dois processos de tratamento»**; e

— **«Um método de programação de desmontes»**.

(1) — Eng.º de Minas (IST) — Director Técnico das Minas de S. João e Algares (Aljustrel).
(2) — Eng.º de Minas (IST) — Engenheiro Chefe de Fundo das Minas do Lousal.

Na primeira, notando que a planificação da exploração de um jazigo toma, implicita ou explicitamente, em consideração os resultados previstos no processamento do minério tal-qual, é anunciado e demonstrado o seguinte importante teorema:

«Ao alocar-se a cada bloco um de dois tratamentos possíveis, a perda em metal é mínima quando se transferem para o tratamento que conduz ao concentrado mais rico, prioritariamente, os blocos para os quais é menor $\frac{\Delta^* R t}{\Delta^* R}$, *onde* $R = \frac{\Sigma E_i R_i}{\Sigma E_i}$ *(rendimento em peso),* $t = \frac{\Sigma E_i R_i t_i}{\Sigma E_i R_i}$ *(teor) e* Δ^* *é o operador que traduz a transferência de um bloco genérico de um para outro método de concentração».*

Na segunda, demonstrado já o teorema anterior e exemplificada uma sua aplicação prática, os autores definem um método de programação de desmontes aplicável a jazigos regulares onde seja possível definir painéis ou blocos de exploração dos quais se conhecem o volume, o teor médio, a distância efectiva do respectivo centro de massas ao ponto de descarga, etc... O método consiste em estabelecer um critério simples e preciso de combinatória dos blocos que garanta, durante toda a exploração, a estacionaridade do centro de massa do jazigo e, portanto, a constância da frota de desmonte e transporte. O método permite ainda garantir a constância, dentro de certos limites impostos «a priori», de outro ou outros parâmetros pertinentes, como por exemplo o teor do concentrado obtido por tratamento do minério tal-qual daquele modo explorado.

Este método foi utilizado nos últimos anos na programação de desmontes a céu aberto dos jazigos eluviais de ferro da área de Cassinga (Angola), da Companhia Mineira do Lobito SARL, embora adaptado às restrições locais, e nessa utilização e adaptação colaborámos, incluindo a sua total computorização e controlo e análise de resultados. Estamos, assim, plenamente conscientes das virtudes de tal método, a principal das quais é que não conduz à fixação rígida de um programa de exploração, visto que escolhida certa trajectória de desmonte esta pode ser frequentada arbitrariamente, desde que determinadas relações de massas, a combinar entre blocos, sejam respeitadas.

Regressados de Angola e vindo ambos trabalhar em minas de lavra subterrânea, decidimos tentar adaptar os conhecimentos anteriores ao caso destas minas, generalizando o método, não esquecendo que é condição para sua aplicação que o domínio do jazigo onde se pretende usá-lo possa ser descretizado em blocos susceptíveis de serem desmontados mediante qualquer sequência temporal, isto é, a existência de constrangimentos sequenciais no desmonte dos blocos implica a sub-divisão do jazigo em domínios onde seja indiferente a ordem de exploração dos referidos blocos (domínios temporizados).

2. SIMBOLOGIA USADA

Iremos usar, ao longo do presente trabalho, a seguinte simbologia:

e_o — caudal objectivo de tal-qual a extrair da Mina
E_i — tonelagem efectivamente extraída do piso i
$e_o = e_x + e_y + e_z + \ldots + e_i + \ldots$ — repartição da tonelagem objectivo constante e_o por cada piso da Mina
r — rendimento real do poço de extracção
r_h — rendimento horário do poço de extracção
h — tempo de trabalho do poço de extracção
e_i — tonelagem objectivo de tal-qual a extrair do piso i
$A_i, B_i, C_i, \ldots, X_i, \ldots$ — unidades de exploração do piso i
T_{i_x} — tonelagem abatida em cada «corte» da unidade X_i
z_{i_x} — ciclo da pá auto-carregadora na unidade X_i
t_o — tempo de carga, descarga e manobras da pá auto-carregadora em cada ciclo
l_{i_x} — distância de carregamento a considerar na unidade X_i (ida e volta)
v — velocidade média de trânsito das pás auto-carregadoras
p_{i_x} — capacidade, em peso, de transporte na unidade de tempo da pá auto-carregadora na unidade X_i
φ — capacidade útil, em peso, da pá auto-carregadora
η — rendimento global de utilização das pás auto-carregadoras
n_{i_x} — número de pás auto-carregadoras trabalhando na unidade X_i
n_i — número total de pás auto-carregadoras no piso i
e_{i_x} — tonelagem objectivo de tal-qual a extrair da unidade X_i
Z — constante que, por definição, é $Z = \Sigma\, e_{i_x}\, l_{i_x}$
R_{i_x} — reserva a explorar na unidade X_i, em peso, de tal-qual
m — número de actos de exploração para esgotar o piso i
$\bar{L}_i$ — distância média («centro de massas») ponderada de carregamento a considerar para todas as unidades de exploração do piso i

R_i — reserva a explorar no piso i, em peso, de tal-qual

$\overline{\mu}_i$ — rendimento em peso médio ponderado do minério do piso i

$\overline{C}_i$ — teor de concentrados médio ponderado do minério do piso i

μ_{i_x} — rendimento em peso do minério da unidade X_i

C_{i_x} — teor de concentrados do minério da unidade X_i

$z_{1_{i_x}}$ — ciclo de rolagem de uma composição carregada na unidade X_i

$t_{1_{i_x}}$ — tempo de rolagem em carga da locomotiva no piso i transportando minério da unidade X_i

$t_{2_{i_x}}$ — tempo de rolagem em vazio da locomotiva no piso i em relação à unidade X_i

t_3 — tempo total de manobras (nas toldas e na arreação) num ciclo de rolagem

d_{i_x} — distância de rolagem para o minério da unidade X_i (ida)

v_1 — velocidade média de trânsito em carga da locomotiva

$v_2 = Kv_1$ — velocidade média de trânsito em vazio da locomotiva

$K = \frac{v_2}{v_1}$ — constante que relaciona v_2 e v_1

$p1_{i_x}$ — capacidade, em peso, de transporte na unidade de tempo da locomotiva na unidade X_i

φ' — capacidade útil, em peso, da locomotiva

η' — rendimento global de utilização das locomotivas

N_i — número de locomotivas necessárias no piso i para se obter o objectivo e_i

Z' — constante que, por definição, é $Z' = \Sigma\ e_{i_x}\ d_{i_x}$

D_i — distância média («centro de massas») ponderada de rolagem a considerar para o piso i

q' — capacidade útil, em peso, de cada vagona

θ — número de unidades de exploração em actividade de carregamento simultaneamente no piso i

N_c — número de ciclos da pá auto-carregadora necessários para completar uma composição de vagonas

P_{i_x} — produção horária de uma composição de vagonas com minério da unidade X_i

N_r — número de composições de vagonas necessárias, numa hora, para a unidade X_i

N_v — número de vagonas em cada composição

z_p — ciclo do poço de extracção para o piso i

H_i — profundidade do piso i

v_s — velocidade de subida no poço de extracção

v_d — velocidade de descida no poço de extracção

$V = v_s = v_d$ — velocidade considerada para o poço de extracção

T — tempo de carga e descarga no poço de extracção

p_{p_i} — capacidade, em peso, de extracção na unidade de tempo do poço de extracção em relação ao piso i

φ_p — capacidade útil, em peso, do poço de extracção

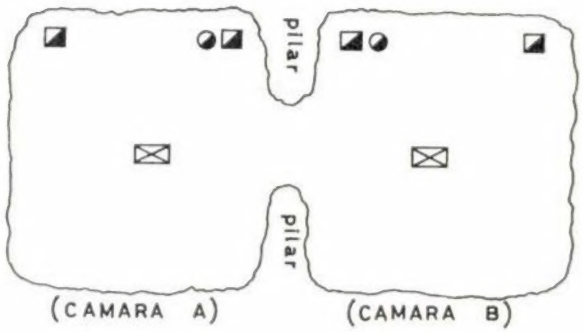
3. A UNIDADE DE EXPLORAÇÃO

A estrutura do jazigo e a correlativa rede de acessos têm importância primordial na definição da unidade de exploração a considerar. Os autores dos dois trabalhos já citados usam os painéis ou blocos de exploração como sendo as suas unidades de exploração e a cada uma dessas unidades estão adstritos vários parâmetros, mas não impuseram constrangimentos temporais para a exploração daquelas unidades, pois consideraram que qualquer delas seria acessível para desmonte, em qualquer momento, independentemente do avanço do desmonte nas unidades de exploração vizinhas.

No desmonte subterrâneo usual de massas minerais segue-se actualmente o método de «câmaras e pilares» e, dentro de cada câmara, utiliza-se o «cut and fill». Atendendo precisamente à estrutura do jazigo, à sua rede interior de acessos e ao método de desmonte apontado, a unidade de exploração a considerar é o conjunto formado por duas câmaras contíguas (fig. 1). Poder-se-á perguntar qual a razão de uma unidade de exploração englobar duas câmaras e não apenas uma câmara. A resposta é fundamentada em:

1.º) o maior investimento em equipamento verifica-se nas pás auto-carregadoras, pelo que há interesse em as manter devidamente ocupadas e evitar o seu sub-aproveitamento; para tal programa-se o desmonte

das duas câmaras da unidade de exploração de forma complementar, o que é possível, por exemplo, segundo o esquema:



◪ "baixada" para passagem de pessoal, ar, água e materiais

◕ "tolda" (ponto de descarga do minério).

⊠ chaminé de entulhos e ventilação (existe só no "céu")

Fig. 1

Corte horizontal de uma unidade de exploração normal (com 2 câmaras)

CÂMARA A

ciclo completo de trabalho:
- preparação
- perfuração
- disparo
- carregamento
- entulhamento
- entulhamento

(carregamento, entulhamento, entulhamento: uso da pá)

- preparação
- perfuração
- disparo

CÂMARA B

uso da pá:
- carregamento
- entulhamento
- entulhamento

ciclo completo de trabalho:
- preparação
- perfuração
- disparo
- carregamento (uso da pá)
- entulhamento (uso da pá)
- entulhamento (uso da pá)

2.º) Com o avanço do desmonte, a certa altura tem-se necessidade de proteger o equipamento existente na câmara, o que é feito retirando-o para a outra câmara da unidade de exploração através da sua comunicação, aberta entre os dois pilares que dividem a unidade de exploração; todo esse equipamento ficaria então inactivo, pelo que o respeito pelo apontado em 1.º tem a vantagem de ele estar protegido dos disparos na câmara vizinha, para além de não ter equipamento de carga e transporte parado.

No entanto não se deve esquecer as franjas do jazigo, que podem obrigar a existência de um número ímpar de câmaras no mesmo piso da Mina. Neste caso pode-se escolher a melhor de duas alternativas:

Fig. 2

Corte horizontal de uma unidade de exploração só com 1 câmara

1.º) a unidade de exploração ficará constituída por uma única câmara (fig. 2) mas há que realçar o aumento de custos devido à obrigação da existência de um maior número de toldas por área a desmontar e ao equipamento ter de ser protegido na zona aberta em estéril sem ficar em actividade; e

2.º) a unidade de exploração ficará constituída por três câmaras (fig. 3), funcionando uma câmara como complemento de duas outras câmaras; nos casos de franja normais esta solução é preferível à da constituição de uma unidade de exploração apenas com uma câmara.

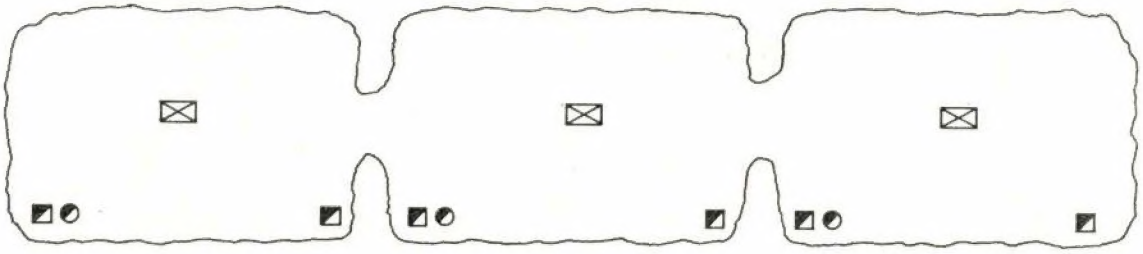


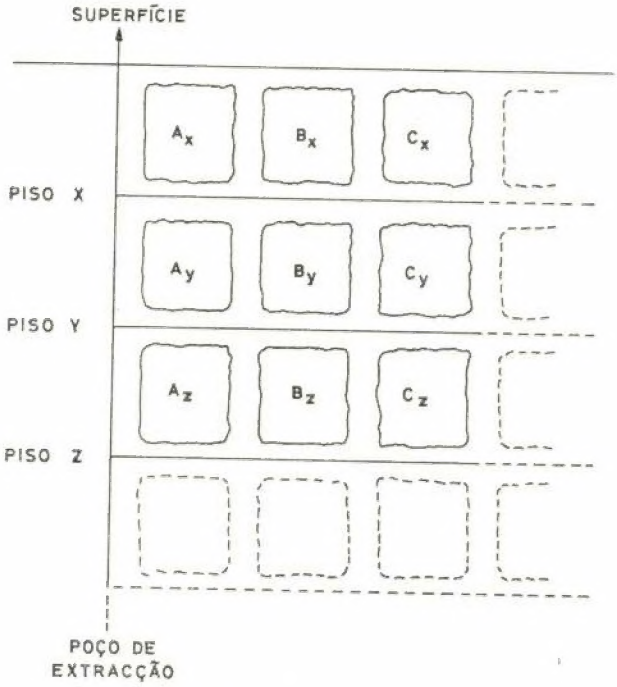
Fig. 3

Corte horizontal de uma unidade de exploração com 3 câmaras

Quanto ao problema da quantidade de equipamento tem de se notar que não é ele verdadeiramente que define a unidade de exploração, sendo adiante abordado o modo de determinação da quantidade de máquinas carregadoras e/ou transportadoras necessárias, apenas sendo certo que em cada unidade (quer tenha 1,2 ou 3 câmaras) terá de haver o mínimo de uma pá auto-carregadora, podendo, no entanto, haver maior número de pás na frota de uma unidade de exploração.

4. INSERÇÃO NO JAZIGO DAS UNIDADES DE EXPLORAÇÃO

No caso geral um jazigo em exploração é dividido por pisos e cada piso em câmaras. Dada esta definição vamos considerar cada piso dividido nas nossas unidades de exploração, tendo a figuração esquemática da fig. 4.



A, B, C, ... — unidades de exploração.
B_y — unidade de exploração B do piso Y.

Fig. 4
Esquema de um jazigo vulgar

Admite-se, como é usual, que se pretende extrair para a superfície caudal constante de minério tal-qual explorado no jazigo (e_o = constante). O poço de extracção terá, um rendimento real definido por:

$$r = \frac{Ex}{e_x} + \frac{Ey}{e_y} + \frac{Ez}{e_z} = \Sigma \left(\frac{Ei}{e_i} \right)$$

e terá também um rendimento horário definido por:

$$r_h = \frac{r}{h} = \frac{1}{h} \Sigma \left(\frac{Ei}{e_i} \right)$$

No entanto, ao apontar-se uma repartição ($e_o = e_x + e_y + \ldots + e_i + \ldots$) da tonelagem objectivo constante e_o por cada piso da Mina, para se poder definir os rendimentos do poço de extracção, é porque uma outra programação prévia já determinara, para o tempo h, qual o objectivo da extracção em cada piso da Mina. Então, vamos considerar o piso genérico i, do qual se pretende extrair, durante o tempo h, a tonelagem e_i, tonelagem esta a obter das diversas unidades de exploração do piso (A_i, B_i, C_i, ..., X_i, ...); cada uma destas unidades de exploração é considerada como uma unidade de trabalho (descrição justificada em 3), logo a cada unidade de exploração X_i terão de ser adstritos os vários parâmetros e considerar e devidamente simbolizados pela colocação dos índices i_x.